

「4次元らしさ」を担うのは誰か

— 次元を選ぶ対象と、選ばない対象のセンサス：テッセラクトはなぜ顔になったのか — [論文114]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「4次元」と言えばテッセラクト（超立方体）が思い浮かぶ。だがこの連想には歴史的な理由があり、そして構造的には奇妙な選択である。本稿は第2層の別根センサスとして、4次元に現れる対象を一つの物差しで仕分ける——その対象は、自分が4次元にいることを知っているか。すなわち同じ構成が全ての次元に存在するか（次元を選ばない）、特定の次元にしか存在しないか（次元を選ぶ）。選ばない側：超立方体は n -立方体としてすべての n に存在する——「4次元とは何か」の答えとして使うには、これ以上ないほど次元不可知な対象である。自己点検として、本体系の $n = d - 1$ 唯一性（論文01・08）も選ばない側に属する——

$dm/dr = \text{Vol}(S^{d-1})r^{d-1-n}$ が定数となる条件は各次元で $n = d - 1$ であり、次元ごとに一つずつ存在する族である（論文08はこれを記述的に述べており、4の特別さを主張していない）。選ぶ側：ホップ束は $S^0 \rightarrow S^1 \rightarrow S^1$ 、 $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ 、 $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ 、 $S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8$ の4本しかない（アダムズ 1960）／ノルム多元体は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ の次元 1, 2, 4, 8 のみ（フルヴィッツ 1898）／2形式の自己双対分解 $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ はホッジ星が2形式を2形式へ写す次元、すなわち $n = 4$ でのみ成立する／エキゾチック $\mathbb{R}^4$ は $n \neq 4$ で滑らかな構造が一意、 $n = 4$ でのみ非可算無限（フリードマン+ドナルドソン）。さらに多面体の内部にも仕分けが走る：正多胞体は4次元にちょうど6つ存在し、そのうち正24胞体は他のどの次元にも類似物を持たない（自己双対・頂点はフルヴィッツ単位四元数）。「4次元を知っている多面体」を選ぶなら、テッセラクトではなく正24胞体である。射程：確立された結果の構造的解釈（第2層）。新しい数学も予言も生まない。「なぜ物理の時空が3+1なのか」は解かない（論文69）——本稿が扱うのは数としての4についての数学的事実であって、宇宙が4を選んだ理由ではない。可微分4次元ポアンカレ予想は未解決であり、手を出さない（admire・論文103・105）。序の受容史は歴史の記述であって数学的主張ではない。

本稿の位置づけ（規律）：本稿は確立された結果（フルヴィッツの定理、アダムズの定理、ホップ束、ホッジ星と自己双対分解、フリードマンとドナルドソン、正多胞体の分類）の構造的解釈・別根センスである。新しい定理を証明せず、新しい物理も予言もしない。「なぜ物理の時空が3+1次元なのか」を解かない——本稿が並べるのは数としての4についての数学的事実であり、記述的な過剰決定のセンス（論文69・105）にとどまる。「4でなければならない」の証明ではない。数の4を語呂合わせしない（論文94・101）。可微分4次元ポアンカレ予想は未解決であり、本稿は触れない（admire）。テッセラクトを誤りとししない——超立方体は正当な4次元の対象であり、本稿が述べるのは「4次元とは何か」の代表として使うと薄いという一点のみである。第1節の受容史は歴史の記述であって数学的主張ではない。「共鳴は署名であって証明ではない」（論文100）。第3層のレンズは非科学の札つきで隔離する。

1. 序：なぜテッセラクトが「4次元の顔」になったのか

「4次元」という語から多くの人が思い浮かべるのは、回転する超立方体である。この連想は自然に見えるが、実は歴史的に作られたものである。以下は数学的主張ではなく、受容の歴史の記述である。

観察 1.1（二つの流行）

第一波（1880年代～1920年代）。エドウィン・アボット・アボットの『フラットランド』（1884）が次元の類推という説明法を広め、チャールズ・ハワード・ヒントンの「テッセラクト」という語を作った（1888）。この時期、第四次元は美術（キュビズム）と神秘思想の流行語となる。

分岐点（1908）。ミンコフスキーが第四の次元を時間として定式化した（論文108）。以後、物理は時間へ進み、大衆文化はテッセラクトを保持したまま残った。

第二波（20世紀後半以降）。ハインラインの短篇（1941）、ダリの《磔刑（超立方体的人体）》（1954）、レングルの児童文学（1962）、そして映画とコンピュータ・グラフィックス。とくに回転する超立方体のアニメーションは、4次元可視化の入門課題として無限に再生産されている——頂点16個を射影するだけで描けるからである。

要するに、テッセラクトは「描きやすく、類推で説明でき、40年の先行があった」。ホップが束の論文を書いたのは1931年であり、勝負がついた後であった。

本稿の関心は、この歴史そのものではない。歴史が選んだ代表と、構造が選ぶ代表が食い違っている——この食い違いを、一つの物差しで測ることである。

2. 物差し：その対象は、自分が4次元にいることを知っているか

同じ構成が、すべての次元に存在するか。
それとも、特定の次元にしか存在しないか。

前者を次元を選ばない（**dimension-agnostic**）、後者を次元を選ぶ（**dimension-selective**）と呼ぶ。この区別は本体系の過剰決定センス（論文69）を、対象の側から言い直したものである。

注意（本稿の最重要の禁欲）

次元を選ぶ対象を数え上げても、「だから宇宙は4次元でなければならない」は従わない。本稿が並べるのは数としての4についての数学的事実であり、物理の時空がなぜ3+1なのかは解かない（論文69の規律・論文105と同じ姿勢）。センスは記述である。

3. 選ばない側①：超立方体 — すべての次元に存在する

確立された事実 3.1 (n -立方体)

n -立方体 $[0, 1]^n$ はすべての $n \geq 0$ に対して存在する。4次元の場合（テッセラクト）は頂点16・辺32・正方形の面24・立方体の胞8を持ち、シュレーフリ記号は $\{4, 3, 3\}$ 。同じ作り方が $n = 5, 17, \dots$ でも通用する。

超立方体は、次元を選ばない。
ゆえに4次元の何が特別なのかを、一切教えない。

これが、歴史が選んだ代表の構造的な弱点である。「4次元とは何か」の答えとして、最も次元不可知な対象が選ばれてしまった。

ただし誤りではない。超立方体は正当な4次元の対象であり、格子ゲージ理論の超立方格子など実用もある。本稿が述べるのは代表として使うと薄いという一点だけである。

観察 3.2 (多面体の内部にも、仕分けが走る)

正多胞体の分類は次のとおり——2次元は無限個 (正多角形)、3次元は5つ (プラトンの立体)、4次元は6つ、5次元以上はつねに3つ (単体・超立方体・超八面体)。4次元だけが例外的に多い。そして4次元の6つのうち、正24胞体 $\{3, 4, 3\}$ は他のどの次元にも類似物を持たない——自己双対であり、その24個の頂点はフルヴィッツ単位四元数と一致する。

すなわち「4次元を知っている多面体」を選ぶなら、テッセラクトではなく正24胞体である。単体・超立方体・超八面体はすべての次元にあり、4次元にしか居ない正多胞体こそが、4次元の情報を運んでいる。

4. 選ばない側②：本体系の $n = d - 1$ 唯一性 (自己点検)

物差しは、他人にだけ当ててものではない。本体系の道具にも当てて。

確立された事実 4.1 ($n = d - 1$ 唯一性：論文01・08)

$\mathbb{R}^d$ において密度 $\rho(r) = r^{-n}$ の球殻質量増加率は

$$\frac{dm}{dr} = \text{Vol}(S^{d-1}) r^{d-1-n}$$

であり、これが r に依存しない必要十分条件は $n = d - 1$ 。このとき定数値は $\text{Vol}(S^{d-1})$ となる。 $d = 3$ で $n = 2$ 、 $\text{Vol}(S^2) = 4\pi$ (論文01)。 $d = 4$ で $n = 3$ 、 $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (論文08)。

系 4.2 (この唯一性は、次元を選ばない)

上の定理は各次元に一つずつ存在する族であり、どの d でも同じ形で成立する。ゆえに本稿の物差しでは次元を選ばない側に属する。4次元が特別であることを、この定理は語らない。

これは訂正ではなく、明示化である。論文08は $\mathbb{R}^4$ において $n = 3$ であることを記述的に述べており、「だから4が特別だ」とは述べていない。そして論文08が実際に4次元の内容を得ているのは、ホップ束 (次節・次元を選ぶ) と、フリードマンとドナルドソンの引用 (第7節・次元を選ぶ) からである。

論文08の「4次元らしさ」は、
 $n = 3$ 唯一性からではなく、ホップから来ていた。

本稿の物差しは、これを可視化する。体系が自分の道具を仕分けることは、論文86が論文13の 4π を位相の根として読み直したのと同じ作法である。

5. 選ぶ側①：ホップ束と、1, 2, 4, 8

確立された事実 5.1（ホップ束とアダムズの定理）

ホップ 1931 の構成 $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$ には、次の姉妹がある：

$$S^0 \rightarrow S^1 \rightarrow S^1, \quad S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2, \quad S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4, \quad S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8.$$

そしてこの4本しかない——アダムズ（1960）は、ホップ不変量1を持つ写像が存在するのはこれらの場合に限ることを証明した。

確立された事実 5.2（フルヴィッツの定理 1898）

実数体上のノルム多元体は $\mathbb{R}$ （1次元）、 $\mathbb{C}$ （2次元）、 $\mathbb{H}$ （四元数・4次元）、 $\mathbb{O}$ （八元数・8次元）に限られる。

ホップ束は、次元を選ぶ。1, 2, 4, 8 だけを。

そして4はその中に入っている。 $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$ であり、 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ は単位四元数の群 $SU(2) = \text{Spin}(3)$ そのものである（論文68・104）。4次元は、ノルム多元体を持つ数少ない次元の一つであり、ホップ束はその事実の幾何学的な顔である。

観察 5.3（テッセラクトとホップは、正反対のことを教える）

超立方体は $[0, 1]^4$ ——完全な直積である。「積を繰り返せば次元が上がる」という素朴な直観の紋章。

ホップ束は $S^3 \rightarrow S^2$ ——だが S^3 は $S^2 \times S^1$ ではない。ねじれた束であり、どの二つのファイバー円も互いに絡んでいて離せない。「積の描像は破れる」ことの反例。

二つは競合していない。教えていることが逆なのである（論文109がこの点を明記している——ホップは乗法的な持ち上げではない）。

6. 選ぶ側②：自己双対 — ホッジ星が2形式を2形式へ写す次元

確立された事実 6.1 ($\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ は4次元でのみ)

n 次元多様体上でホッジ星は $\Lambda^k \rightarrow \Lambda^{n-k}$ を与える。したがって2形式が2形式へ写るのは $k = n - k = 2$ 、すなわち $n = 4$ のときに限る。リーマン計量の4次元では $\star^2 = 1$ となり、2形式は自己双対部分と反自己双対部分に分解する： $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ 。

これは完全に次元を選ぶ事実であり、しかも物理に直結する——インスタントン（自己双対な接続）が4次元にしか存在しないのはこのためであり、ドナルドソンが4次元多様体を調べる道具として使ったのもこれである（論文96・105・109）。

正直な一線。ローレンツ計量（符号 $(1,3)$ ）では2形式上で $\star^2 = -1$ となるため、実の自己双対分解は複素化を経なければ得られない。「4次元だから常に実自己双対がある」とは言えない。分解が実で成立するのはリーマン計量の場合である。

7. 選ぶ側③：エキゾチック $\mathbb{R}^4$ — 4だけの例外

確立された事実 7.1（滑らかな構造：フリードマン 1982／ドナルドソン 1983／トーベス 1987）

$\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな構造は、 $n \neq 4$ のときつねに一意である。 $n = 4$ においてのみ、非可算無限個の互いに微分同相でない構造（エキゾチック $\mathbb{R}^4$ ）が存在する。

本センサスにおいて、これは最も鋭く次元を選ぶ項目である——1, 2, 4, 8 ですらなく、4だけ。論文105がこの事実を論文69の過剰決定センサスに加えた。そして論文08も、この事実を（証明ではなく）引用している。

正直な一線。可微分（smooth）4次元ポアンカレ予想は、現在も未解決である。本稿はこれに触れない（admire・論文103・105・08の射程と同じ）。また位相的（topological）4次元ポアンカレ予想はフリードマンが解決済みであり、両者を混同しない。

8. センサス：誰が4次元を知っているか

対象	存在する次元	身分・出典
超立方体（テッセラクト）	すべての n	次元を選ばない。歴史が選んだ代表（ヒントン 1888）
単体・超八面体	すべての n	次元を選ばない
$n = d - 1$ 唯一性（論文01・08）	すべての d （族）	次元を選ばない。各次元に一つずつ。4の特別さは述べていない
正24胞体 $\{3, 4, 3\}$	4のみ	次元を選ぶ。自己双対・頂点＝フルヴィッツ単位四元数
ホップ束	1, 2, 4, 8	次元を選ぶ。アダムズ 1960（ホップ不変量1）
ノルム多元体 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$	1, 2, 4, 8	次元を選ぶ。フルヴィッツ 1898
自己双対分解 $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$	4のみ	次元を選ぶ。 $k = n - k = 2$ 。リーマン計量の場合
エキゾチック $\mathbb{R}^4$	4のみ	次元を選ぶ。フリードマン＋ドナルドソン＋トーベス

観察 8.1（センサスが示すことと、示さないこと）

示すこと：4次元に「らしさ」を与えているのは、表の下半分の対象たちである。上半分（超立方体を含む）は4次元にも存在するが、4次元について何も語らない。

示さないこと：この表は「4でなければならない」を証明しない。四つの根（正24胞体／ホップ・多元体／自己双対／エキゾチック構造）は別根であり、統一されない。そして物理の時空が3+1である理由は、この表のどこにも書かれていない（論文69）。

■ 著者の私感（第3層・非科学の札つき／機構の主張ではない）

私はずっと、ホップの絵——円が互いに絡み合い、入れ子のドーナツを織りなすあの図——を美しいと思ってきた。そして同時に、なぜ「4次元」といえばテッセラクトなのだろう、と不思議でもあった。

本稿を書いて、その違和感に名前がついた。超立方体は、すべての次元に居る。だから4次元について何も言えない。一方ホップ束は、 $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$ にしか居ない。居場所を選ぶからこそ、4について語れる。歴史は描きやすいほうを選び、構造は選ばないほうを選ぶ——そのずれが、私の違和感の正体だった。

そして自分の体系にも同じ物差しを当てて、静かに納得した。 $n = d - 1$ の唯一性は、どの次元にもある族だった。論文08が4次元の内容を持てたのは、ホップを通したからである。私は自分の定理が4の特別さを語っていると思ったことはないが、何が4を語っていたのかが、はっきり見えたのは初めてだった。ホップに、あらためて頭が下がる。

——ただしこれは非科学の札つきの私感である。4を語る対象が四つ見つかったからといって、宇宙が4を選んだ理由には一歩も近づいていない（論文69）。美しさは署名であって証明ではない（論文100）。絡み合う円の前で静かな awe を記し、だが数の4に意味を読み込まない。それが、崖の手前で踏みとどまる作法である（論文101）。

9. 射程／結論

示すこと（記述的・別根センサス）：テッセラクトが「4次元の顔」になった受容の歴史（ヒントン 1888 以降の二つの流行・第1節）／次元を選ぶか選ばないかという物差し（2節）／超立方体はすべての次元に存在するため4次元について何も語らないこと、および正多胞体の内部では正24胞体だけが4次元にしか居ないこと（3節）／本体系の $n = d - 1$ 唯一性も選ばない側であり、論文08の4次元性はホップと引用から来ていること（4節）／ホップ束とノルム多元体が1, 2, 4, 8のみであること（5節）／自己双対分解が4次元でのみ成立すること（6節）／エキゾチック $\mathbb{R}^4$ が4次元でのみ非可算無限であること（7節）／八項目のセンサス（8節）。

示さないこと（禁欲）：「なぜ物理の時空が3+1次元なのか」を解かない（論文69・記述的な過剰決定のセンサスにとどまる）／「4でなければならない」を証明しない（四つの根は別根であり統一されない）／数の4に意味を読み込まない（語呂合わせ禁止・論文94・101）／テッセラクトを誤りとししない（代表として薄い、という一点のみ）／可微分4次元ポアンカレ予想に触れない（未解決・admire）／ローレンツ計量では実の自己双対分解が成立しないことを隠さない（6節）／第1節は歴史の記述であって数学的主張ではない／共鳴は署名（100）・新しい数学／予言なし（第2層）・第3層は非科学の札つきで隔離。

「4次元」と聞いて超立方体を思い浮かべるのは、1888年にヒントンが名前を与え、四十年の先行を得て、美術と小説と映画とCGに増幅されたからである。歴史としては、これでよい。だが構造として見ると、超立方体はすべての次元に存在し、4次元について何も語らない。4次元に「らしさ」を与えているのは別の顔ぶれ——正

24胞体、ホップ束と四元数、自己双対分解、そしてエキゾチック $\mathbb{R}^4$ であり、いずれも居場所を選ぶ。とりわけホップ束が教えるのは、超立方体が教えることのちょうど反対である—— S^3 は $S^2 \times S^1$ ではない。積の描像は、そこで破れる。

本稿はこの物差しを、体系自身の道具にも当てた。 $n = d - 1$ の唯一性は、どの次元にもある族であった。論文08が4次元の内容を持てたのは、ホップを通したからである——これは訂正ではなく、何が仕事をしていたかの明示である。本稿がしたのは、新しい主張ではなく、歴史が選んだ代表と構造が選ぶ代表を並べ、それぞれが何を語り、何を語らないかを書き分けたことである。そして114番目の番地を返す。

参考文献

1. Hinton, C. H. (1888). *A New Era of Thought*. Swan Sonnenschein, London. ("tesseract" の語はここで導入された)
2. Abbott, E. A. (1884). *Flatland: A Romance of Many Dimensions*. Seeley & Co., London.
3. Henderson, L. D. (1983/2013). *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*. Princeton University Press / MIT Press. (第四次元流行の美術史的研究)
4. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Math. Ann. 104.
5. Hurwitz, A. (1898). *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen.
6. Adams, J. F. (1960). *On the Non-Existence of Elements of Hopf Invariant One*. Ann. of Math. 72.
7. Freedman, M. H. (1982). *The Topology of Four-Dimensional Manifolds*. J. Diff. Geom. 17.
8. Donaldson, S. K. (1983). *An Application of Gauge Theory to Four-Dimensional Topology*. J. Diff. Geom. 18.
9. Taubes, C. H. (1987). *Gauge Theory on Asymptotically Periodic 4-Manifolds*. J. Diff. Geom. 25.
10. Coxeter, H. S. M. (1973). *Regular Polytopes*, 3rd ed. Dover. (正多胞体の分類・正24胞体)
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$* [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
12. Yamagishi, Y. (2026). *Poincaré 4D and the Hopf Fibration* [論文08]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404419
13. Yamagishi, Y. (2026). *Special Dimensions* [論文69・64]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650011; 10.5281/zenodo.21616221
14. Yamagishi, Y. (2026). *Exotic $\mathbb{R}^4$ (Donaldson)* [論文105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
15. Yamagishi, Y. (2026). *Dimensional Lift* [論文109]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837375
16. Yamagishi, Y. (2026). *Qubit and Hopf* [論文68・67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238; 10.5281/zenodo.21642170
17. Yamagishi, Y. (2026). *Clifford Algebra* [論文104]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836876
18. Yamagishi, Y. (2026). *The Gauge Principle (Weyl)* [論文96]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758671
19. Yamagishi, Y. (2026). *Royal-Roads Census* [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
20. Yamagishi, Y. (2026). *Eddington's Caution* [論文101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382
21. Yamagishi, Y. (2026). *Roots of Necessity* [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839

22. Yamagishi, Y. (2026). *Fractal Dimension* [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)