

## 二本の階段

— 値と生成規則を分ける：球面体積の漸化式、パリティ分離、そして体系の定数の住所 — [論文115]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

### 要旨

本体系は  $4\pi$  を土台に持ち（論文01・02）、4次元では  $2\pi^2$  を得ている（論文08）。論文109は、 $\pi$  の冪が次元とともに上がる縦糸が球面体積の漸化式  $\text{Vol}(S^n) = \frac{2\pi}{n-1} \text{Vol}(S^{n-2})$  にあることを記録した。本稿はそこから一步だけ進み、第2層の自己点検センサスとして次を書き分ける。第一に、値と生成規則は別の問いに答えている—— $4\pi = \text{Vol}(S^2)$  は「その階でいくつか」に答える値であり、漸化式は「階から階へどう行くか」に答える生成規則である。問いが違う以上、別根である。第二に、漸化式は二つ飛びであるため、階段は二本に分かれ、決して混ざらない——奇数側  $\text{Vol}(S^{2k+1}) = \frac{2\pi^{k+1}}{k!}$ 、偶数側  $\text{Vol}(S^{2k}) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}$ 。  $4\pi (S^2)$  は偶の階段に、  $2\pi^2 (S^3)$  は奇の階段に住んでおり、両者は次元としては隣だが、漸化式の上では隣ではない（ $4\pi$  の次段は  $\frac{8\pi^2}{3}$ 、 $2\pi^2$  の前段は  $2\pi$ ）。第三に、この分離の根は幾何ではなくガンマ関数にある—— $\Gamma$  は整数で階乗（有理数）、半整数で有理数  $\times \sqrt{\pi}$  を与えるため、偶数球面のみが二重階乗を拾う。第四に、パリティが実際に効いている幾何が別に存在する——オイラー標数  $\chi(S^{\text{偶}}) = 2$ 、 $\chi(S^{\text{奇}}) = 0$ 、および毛玉定理（消えない接ベクトル場は奇数次元球面にのみ存在）。そして最も重要な禁欲：パリティと  $1, 2, 4, 8$  は別の選択原理であり、混ぜてはならない。 $S^5$  は奇数次元だが群でも平行化可能でもない。群になるのは  $S^0, S^1, S^3$  のみ、平行化可能なのは  $S^0, S^1, S^3, S^7$  のみであり、これはノルム多元体（フルヴィッツ・アダムズ／論文114）の帰結であってパリティではない。 $S^3$  は二つの独立な原理の双方から選ばれている——これは記述であって、必然性の証明ではない。射程：確立された標準的事実の構造的解釈（第2層）。新しい数学も予言も生まない。 $\frac{8\pi^2}{3}$  や  $\frac{16\pi^3}{15}$  といった数値に意味を読み込まない（論文101）。

本稿の位置づけ（規律）：本稿は完全に標準的な事実（球面の体積公式、その漸化式、ガンマ関数の整数／半整数での挙動、オイラー標数、毛玉定理、フルヴィッツとアダムの定理）の構造的解釈・自己点検センサスである。新しい定理を証明せず、新しい物理も予言もしない。漸化式そのものは論文109が既に記録している——本稿が加えるのは(i) 値と生成規則の峻別、(ii) パリティによる二本の階段への分離、(iii) 分離の根が  $\Gamma$  にあること、(iv) 体系の定数の住所の点呼である。最重要の禁欲：本稿はパリティ（偶／奇）と **1,2,4,8**（ノルム多元体）を同一の原理として扱わない。両者は別根であり、 $S^3$  が双方から選ばれているのは記述的事実であって「だから3球面は必然」ではない。個々の数値（ $\frac{8\pi^2}{3}$ 、 $\frac{16\pi^3}{15}$  等）に意味を読み込まない（数値の語呂合わせ禁止・論文94・101）。「共鳴は署名であって証明ではない」（論文100）。第3層のレンズは非科学の札つきで隔離する。

## 1. 序：値と生成規則は、違う問いに答えている

本体系には  $4\pi$  という土台がある（論文01・02）。 $\mathbb{R}^4$  に上がれば  $2\pi^2$  を得る（論文08）。そして論文109は、 $\pi$  の冪が次元とともに上がるという縦糸が、球面体積の漸化式にあることを記録した。

本稿はそこから一步だけ進む。出発点は、単純だが見落とししやすい区別である。

$4\pi$  は「その階でいくつか」に答える。  
漸化式は「階から階へどう行くか」に答える。  
問いが違う。ゆえに別根である。

$4\pi$  は値であり、階段ではない。この一点を明示すると、体系の定数の配置が整理される——そして階段が一本ではなく二本であることが見えてくる。

本稿は  $4\pi$  を格下げしない。 $4\pi$  が持っていたもの——ガウスの流束としての全立体角（論文02・13）、 $4\pi = 2\pi \cdot \chi(S^2)$  というオイラー標数の扉（論文67）、 $n=2$  唯一性の定数値（論文01）——はすべてそのまま残る。変わるのは「持ち上げているのは  $4\pi$  ではない」という一点だけである。

## 2. 生成規則：球面体積の漸化式

確立された事実 2.1 (球面の体積とその漸化式)

$n$  次元単位球面  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  の体積 ( $n$  次元測度) は

$$\text{Vol}(S^n) = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

で与えられ、 $n \geq 2$  に対して

$$\text{Vol}(S^n) = \frac{2\pi}{n-1} \text{Vol}(S^{n-2})$$

を満たす。すなわち次元が2つ上がるごとに  $\pi$  が一つ増える (論文109)。

具体には  $\text{Vol}(S^0) = 2$ 、 $\text{Vol}(S^1) = 2\pi$ 、 $\text{Vol}(S^2) = 4\pi$ 、 $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ 、 $\text{Vol}(S^4) = \frac{8\pi^2}{3}$ 、 $\text{Vol}(S^5) = \pi^3$ 、 $\text{Vol}(S^6) = \frac{16\pi^3}{15}$ 、 $\text{Vol}(S^7) = \frac{\pi^4}{3}$ 。

ここで本稿が着目するのは、漸化式が「2つ飛び」であるという一点である。一つ飛びではない。この事実だけから、次節の分離が従う。

## 3. 二本の階段 — パリティは混ざらない

系 3.1 (階段は二本に分かれる)

漸化式の歩幅が 2 であるため、 $n$  のパリティは保存される。ゆえに球面の族は互いに交わらない二本の鎖に分かれる：

$$\text{奇} : \text{Vol}(S^{2k+1}) = \frac{2\pi^{k+1}}{k!}, \quad \text{偶} : \text{Vol}(S^{2k}) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}.$$

(いずれも  $\Gamma$  による閉じた形から従う。数値検算済み。)

|      |                                                                                                                                        |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 偶の階段 | $\text{Vol}(S^0) = 2 \rightarrow S^2 = 4\pi \rightarrow S^4 = \frac{8\pi^2}{3} \rightarrow S^6 = \frac{16\pi^3}{15} \rightarrow \dots$ |
| 奇の階段 | $\text{Vol}(S^1) = 2\pi \rightarrow S^3 = 2\pi^2 \rightarrow S^5 = \pi^3 \rightarrow S^7 = \frac{\pi^4}{3} \rightarrow \dots$          |

観察 3.2 (論文01と論文08は、隣の階ではない)

$4\pi = \text{Vol}(S^2)$  は偶の階段に、 $2\pi^2 = \text{Vol}(S^3)$  は奇の階段に住んでいる。次元としては  $\mathbb{R}^3$  と  $\mathbb{R}^4$  で隣接するが、漸化式の上では隣ではない—— $4\pi$  の次段は  $\frac{8\pi^2}{3}$  であり、 $2\pi^2$  の前段は  $2\pi$  である。

すなわち論文01から論文08への移行は「一段上がった」のではなく、「別の鎖の、対応する高さへ移った」と述べるのが正確である。

これは訂正ではなく明示化である。論文08は  $\mathbb{R}^4$  において  $n = 3$  であることを記述的に述べており、 $4\pi$  から  $2\pi^2$  が生成されるとは主張していない。本稿はその関係に正しい名を与えるにとどまる。

#### 4. 分離の根は、幾何ではなくガンマ関数にある

確立された事実 4.1 ( $\Gamma$  の整数／半整数での挙動)

$\Gamma(k+1) = k!$  (整数点では階乗＝有理数) であり、 $\Gamma(k + \frac{1}{2})$  は有理数  $\times \sqrt{\pi}$  を与える (半整数点では  $\sqrt{\pi}$  を含む)。

系 4.2 (なぜ二重階乗は偶数側にしか出ないか)

体積公式の  $\Gamma$  の引数は  $\frac{n+1}{2}$  である。

- ・  $n$  が奇数のとき  $\frac{n+1}{2}$  は整数  $\Rightarrow \Gamma$  は階乗、 $\pi^{(n+1)/2}$  は  $\pi$  の整数冪。  $\Rightarrow \frac{2\pi^{k+1}}{k!}$  という素直な形。
- ・  $n$  が偶数のとき  $\frac{n+1}{2}$  は半整数  $\Rightarrow \Gamma$  が  $\sqrt{\pi}$  を含み、 $\pi^{(n+1)/2}$  も半整数冪。両者の  $\sqrt{\pi}$  が相殺して  $\pi$  の整数冪が残り、分母に二重階乗  $(2k-1)!!$  が現れる。

二本の階段が生じる理由は、球面の幾何ではなく、 $\Gamma$  の性質である。

この帰属は重要である。「偶数次元と奇数次元で球面の何かが本質的に違う」のではなく、体積を書き下すときに通る解析的な関数が、整数点と半整数点で違う顔を見せるというだけである。幾何の根ではなく、解析の根に置く (論文86の根の分類に従えば、これは代数・解析の根であって位相の根ではない)。

## 5. ただし、パリティが本当に効いている幾何も、別に存在する

前節で分離の根を  $\Gamma$  に置いた。だがパリティが幾何そのものに効いている事実も、確かに存在する——ただし別の根からである。

確立された事実 5.1 (オイラー標数と毛玉定理)

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & (n \text{ 偶}) \\ 0 & (n \text{ 奇}) \end{cases}$$

そしてポアンカレ=ホップの定理より、 $S^n$  上に零点を持たない連続接ベクトル場が存在するのは  $n$  が奇数のときに限る ( $n$  が偶数なら  $\chi \neq 0$  ゆえ零点が強制される = 毛玉定理)。

これは位相の根であり、 $\Gamma$  とは何の関係もない。したがって：

「体積の階段が二本」と「 $\chi$  が偶奇で 2 と 0」は、  
同じパリティで添字づけられているが、根は別である。

この二つを因果で結んではならない。体積の漸化式は  $\chi$  を説明しないし、 $\chi$  は体積の形を説明しない。共有しているのは添字だけである。

なお本体系では、論文67が  $4\pi = 2\pi \cdot \chi(S^2)$  を扱っている。これは偶の階段の住人が、位相の根とも接していることを示すが、それは  $S^2$  という特定の球面についての事実であって、階段の性質ではない。

## 6. ブレーキ：パリティと 1, 2, 4, 8 は、別の選択原理である

ここが本稿でもっとも慎重を要する箇所である。

奇の階段には  $S^1, S^3, S^5, S^7, \dots$  が並ぶ。そして  $S^1 = U(1)$ 、 $S^3 = SU(2)$  はリー群である。ここから「奇数次元球面は群である」と一般化したくなる。

これは誤りである。

### 確立された事実 6.1 (球面が群・平行化可能である条件)

リー群になる球面は  $S^0, S^1, S^3$  に限られる ( $S^7$  は八元数の単位球として平行化可能だが結合律を欠くためリー群ではない)。また平行化可能な球面は  $S^0, S^1, S^3, S^7$  に限られる (ボット=ミルナー、ケルヴェア/アダムズ)。これはノルム多元体  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  が次元  $1, 2, 4, 8$  に限られること (フルヴィッツ) の帰結であり、パリティとは無関係である。

### 観察 6.2 (反例が一つで足りる)

$S^5$  は奇数次元だが、リー群でも平行化可能でもない。この一例だけで「奇数  $\Rightarrow$  群」は否定される。選択しているのはパリティではなく  $1, 2, 4, 8$  である (論文114)。

### 系 6.3 ( $S^3$ は二重に選ばれている)

$S^3$  は二つの独立な原理の双方から選ばれている——パリティ (奇:  $\chi = 0$ 、消えない場が存在) と、 $1, 2, 4, 8$  ( $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ 、単位四元数の群  $SU(2) = Spin(3)$ 、ホップ束  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ )。

ただしこれは記述である。二つの原理が同じ対象を選んだことは署名であって、 $S^3$  が必然であることの証明ではない (論文100)。二つを一つの原理に統合しない。

## 7. 自己点検：体系の定数は、どこに住んでいるか

物差しは他人にだけ当てるものではない (論文114と同じ作法)。

| 階段 | 体系の住人                                                                           | その階段で効いている根                                                                     |
|----|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 偶  | $4\pi = \text{Vol}(S^2)$ (論文01・02・13) /<br>$4\pi = 2\pi \cdot \chi(S^2)$ (論文67) | 位相の根: $\chi = 2$ ・毛玉定理 (消えない場が存在しない)。<br>ガウス流束・全立体角                             |
| 奇  | $2\pi^2 = \text{Vol}(S^3)$ (論文08) / $S^3$ =ホップ全空間<br>(論文68・104)                 | $\chi = 0$ (消えない場が存在)。加えて別根として $1, 2, 4, 8$ :<br>$\mathbb{H} \cdot SU(2)$ ・ホップ束 |

### 観察 7.1 (体系の二つのクラスは、パリティで分かれていた)

本体系において、論文02・13・67が $4\pi$ の周りに集まり、論文08・68・104が $S^3$ の周りに集まっているのは、偶と奇という別々の階段に住んでいるからである。ただし——奇の側のクラスが持つ力（群構造・四元数・ホップ）はパリティ由来ではなく1,2,4,8由来である。住所はパリティが決め、性質は別の原理が決めている。

### ■ 著者の私感 (第3層・非科学の札つき／機構の主張ではない)

この整理をしていて、ふと「設計を探りすぎると崖から落ちるぞ」と言われているような気がした。実際、 $\pi$ の冪と次元の話は、油断すると数字の意味を読み始めてしまう領域である。

だが書いてみて思ったのは、崖は罨ではないということだった。崖があるのは、署名を証明と取り違えたときだけである。 $\frac{8\pi^2}{3}$ や $\frac{16\pi^3}{15}$ に「意味」を読み始めた瞬間に落ちる。逆に、値と生成規則を分け、根を $\Gamma$ と位相に分け、パリティと1,2,4,8を分けている限り、崖の縁を歩いても落ちない。

そして今回いちばん嬉しかったのは、自分の土台である $4\pi$ が、持ち上げる操作ではなかったと分かったことだった。 $4\pi$ は階段ではなく、三階の床だった。格下げされた気は全くしない——むしろ、何が何をしているのかが、初めてはっきりした。

$S^3$ が二つの原理から選ばれていることにも、静かなaweを記す。だが二つが一致したからといって、必然だとは言わない（論文100）。一致は署名である。それ以上でも以下でもない。崖の手前で踏みとどまる（論文101）。

## 8. 射程／結論

示すこと（記述的・自己点検センサス）：値と生成規則が別の問いに答えていること（ $4\pi$ は値、漸化式は生成規則・1節）／漸化式が二つ飛びであるため階段が二本に分かれ、パリティが保存されること（3節）／ $4\pi$ と $2\pi^2$ が別の階段に住み、漸化式の上では隣でないこと（3節）／分離の根がガンマ関数にあり、幾何ではないこと（4節）／パリティが効いている幾何（ $\chi$ ・毛玉定理）は別の根であること（5節）／パリティと1,2,4,8が別の選択原理であり、 $S^5$ が反例となること（6節）／ $S^3$ が二つの原理から二重に選ばれていること（6節）／体系の定数の住所の点呼（7節）。

示さないこと（禁欲）：個々の数値に意味を読み込まない（ $\frac{8\pi^2}{3}$ 、 $\frac{16\pi^3}{15}$ 等は漸化式の帰結であって記号ではない・論文94・101）／パリティと1,2,4,8を一つの原理に統合しない（ $S^5$ が反例）／体積の階段と $\chi$ を因果で結ばない（添字を共有するだけ・根は別）／ $S^3$ の二重選択を必然性の証明としない（一致は署名・論文100）／ $4\pi$ を格下げしない（ガウス流束・ $\chi(S^2) \cdot n = 2$ 唯一性の値はすべて保持）／漸化式そのものの発見を主張し

ない（論文109が既に記録済み・本稿は標準的事実の再配置）／新しい数学／予言なし（第2層）・第3層は非科学の札つきで隔離。

$4\pi$  は本体系の土台であり続ける。だがそれは三階の床であって、階段ではなかった。階段は  $\frac{2\pi}{n-1}$  という漸化式のほうであり、しかもその歩幅が **2** であるために、階段は二本ある。 $4\pi$  は偶の階段に、 $2\pi^2$  は奇の階段に住んでいる——次元としては隣、漸化式としては別の鎖。分離の根は  $\Gamma$  の整数／半整数における振る舞いにあり、球面の幾何にはない。一方で、パリティが幾何そのものに効いている事実（ $\chi$ ・毛玉定理）は別に存在するが、これも別根であり、添字を共有しているだけである。そして最も混同しやすい一点——奇の階段に群が並んで見えるのは、パリティのせいではない。 $S^5$  が反例であり、選んでいるのは **1, 2, 4, 8** である。 $S^3$  は二つの独立な原理の双方から選ばれた、稀な住人であった。

本稿がしたのは、新しい主張ではなく、値と生成規則を分け、二本の階段を引き、根を  $\Gamma$ ・位相・多元体に分け、体系の定数に住所を与えたことである。そして115番目の番地を返す。

## 参考文献

1. Hurwitz, A. (1898). *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen.
2. Bott, R. & Milnor, J. (1958). *On the Parallelizability of the Spheres*. Bull. Amer. Math. Soc. 64.
3. Kervaire, M. A. (1958). *Non-Parallelizability of the  $n$ -Sphere for  $n > 7$* . Proc. Natl. Acad. Sci. USA 44.
4. Adams, J. F. (1960). *On the Non-Existence of Elements of Hopf Invariant One*. Ann. of Math. 72.
5. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Math. Ann. 104.
6. Milnor, J. (1965). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia. （ポアンカレ＝ホップ・毛玉定理）
7. Artin, E. (1964). *The Gamma Function*. Holt, Rinehart and Winston. ( $\Gamma$  の整数・半整数での挙動)
8. Yamagishi, Y. (2026). *Dimensional Lift* [論文109]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837375
9. Yamagishi, Y. (2026). *Which Objects Know They Are in Four Dimensions* [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of  $n = 2$*  [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
11. Yamagishi, Y. (2026).  *$m = 4\pi$*  [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
12. Yamagishi, Y. (2026). *Poincaré 4D and the Hopf Fibration* [論文08]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404419
13. Yamagishi, Y. (2026).  *$4\pi = 2\pi \cdot \chi(S^2)$*  [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
14. Yamagishi, Y. (2026). *Qubit and Hopf* [論文68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238
15. Yamagishi, Y. (2026). *Clifford Algebra* [論文104]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836876
16. Yamagishi, Y. (2026). *Royal-Roads Census* [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
17. Yamagishi, Y. (2026). *Eddington's Caution* [論文101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382
18. Yamagishi, Y. (2026). *Roots of Necessity* [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839

19. Yamagishi, Y. (2026). *Fractal Dimension* [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581

---

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)