

スケール不変性は、四通りに指数を選ぶ

— 恒等式・次元行列・経験・不動点の峻別、 Π 群がちょうど一つという条件、そして異常次元という

反例 — [論文117]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文01は「殻質量増加率が半径に依存しない」という要求から $n = 2$ を一意に取り出した。同じ形の物語——スケールを持たないことを要求すると、指数が一意に決まる——は、コルモゴロフ1941の $-5/3$ 則、ゲーテンベルク=リヒター則の $b \simeq 1$ 、バッキンガムの Π 定理、くりこみ群の臨界指数にも見える。本稿はこの韻を検査し、一つの機構ではなく四つの別根であることを示す。根A (恒等式): 論文01. r^{2-n} が定数であるのは指数が消えるときのみという補題が強制する。次元行列は登場しない。根B (次元行列): K41 の $E(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ 、コルモゴロフ長 (論文03)、プランク還元 (論文116)。指数は次元行列の可逆性から決まる。ここで本稿は体系自身の定理に第三の実例を加える——論文39 は $(\hbar, G, c)$ で $|\det| = 2$ ゆえ半整数、論文03 は (ν, ε) で $|\det| = 4$ ゆえ4乗根を示した。 (ε, k) では $|\det| = 3$ であり、だから $2/3$ と $5/3$ の分母が 3 になる (クラメルの規則)。さらに根Bが効く正確な条件を書く: 独立な無次元群の個数がちょうど 1 のときに限る。K41・コルモゴロフ長・プランク還元はいずれも $n - \text{rank} = 1$ であり、粘性を一つ加えるだけで 2 になって指数は決まらなくなる (本稿で検算)。したがって物理は代数ではなく閉包仮説の側に全部入っている。根C (経験): $b \simeq 1$ はカタログへの当てはめであって導出ではない。何もこの値を強制していない。根D (不動点): 臨界指数はくりこみ流の線形化の固有値であり、一般に次元解析の値ではない。3次元イジングの相関関数は $1/r^{d-2+\eta}$ で $\eta \simeq 0.036$ ——素朴な次元指数 $d - 2 = 1$ は誤りであり、その差の名前が異常次元である。これが韻を禁じる反例である: 根Bが普遍なら異常次元は存在しえない。そして反例はコルモゴロフ自身の中にあった——構造関数の指数 ζ_p は $p = 3$ で厳密に 1 (4/5法則。ナビエ=ストークス方程式からの定理であって次元解析ではない) だが、 $p > 3$ では $\zeta_p < p/3$ となる。K41 はちょうど一つの次数で厳密であり、他では外れる。論文03 が「間欠性補正に踏み込まない」と書いて止まった場所が、ここである。自己点検: $\rho(r) = r^{-n}$ は基準半径を選ばなければ次元的に同次でない (体系はそれを 1 に選んでいる)。定理は生き残るが住所を書く。そして体系は根Dの結果を一つも持っていない——論文01が根A、論文03・39・116が根B。射程: 確立された標準的事実の構造的解釈と自己点検 (第2層)。新しい数学も予言もない。 $2 \cdot 5/3 \cdot 1$ を同じ数として扱わない (論文94・101)。

本稿の位置づけ（規律）：本稿が用いる素材はすべて既知の標準結果である——コルモゴロフ1941の次元解析による導出、**4/5**法則、間欠性と多重フラクタル模型、バッキンガムの **II** 定理、グーテンベルク＝リヒター則、くりこみ群と臨界指数・異常次元。新しい定理は一つも証明しない。本稿の寄与は峻別と条件づけである——(i)「スケール不変性が指数を選ぶ」を四つの別根に分解し、(ii) 根Bが効く正確な条件（**II** 群がちょうど一つ）を書き、(iii) 根Dが根Bへの反例を含むことを異常次元によって示し、(iv) その反例がコルモゴロフ自身の主題の内部にあることを構造関数で確認し、(v) 体系の立ち位置を点呼する。最重要の禁欲：四つを一つの原理に統合しない。 **$n = 2$** 、 **$-5/3$** 、 **$b \simeq 1$** 、 **$\nu \simeq 0.630$** は値としても機構としても別物である。数値の語呂合わせをしない（論文94・101）。「共鳴は署名であって証明ではない」（論文100）。乱流の大域正則性にも臨界現象の厳密構成にも触れない。第3層のレンズは非科学の札つきで隔離する。

1. 序：設計書の表を、まず疑う

本稿の出発点は、一枚の表であった。体系の次作候補として書かれた設計書に、次のような対応表が置かれていた——「スケール不変性を要求すると指数が一意に決まる」という構造が、論文01の **$n = 2$** 、コルモゴロフ1941の **$-5/3$** 、グーテンベルク＝リヒターの **$b \simeq 1$** 、バッキンガムの **II** 定理、くりこみ群の臨界指数に共通して現れる、と。

韻は確かに聞こえる。だが体系の作法は、韻が聞こえたときにこそ物差しを当てることであった（論文100・101）。そこで本稿はまず、自分の設計書を疑うところから始める。

同じ物語に見える五つは、本当に同じ機構だろうか。

検査の結果は否であった。五つは四つの別根に分かれ、しかもそのうちの一つは、他の一つに対する反例を含んでいた。本稿はその仕分けを書く。

2. 根A：恒等式の根 — 論文01

確立された事実 2.1（論文01の骨組み）

3次元空間で球対称べき型密度 $\rho(r) = r^{-n}$ をとると、殻質量増加率は

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}$$

となる。これが r に依存しないための必要十分条件は **$n = 2$** である。

この結論を強制しているのは何か。次元解析ではない。効いているのは次の補題ただ一つである—— r^α が $(0, \infty)$ 上で定数であるのは $\alpha = 0$ のときに限る。

観察 2.2 (根Aには次元行列が無い)

ここには「単位を揃える」という操作が一切現れない。 n は密度分布の形を指定する自由な指数であって、次元をもつ定数ではない。要求されているのは変数からの独立性であり、単位系に対する共変性ではない。したがって論文01の機構は、次節以降の次元解析とは別の根である。

根A：指数は、冪関数についての恒等式が強制する。

3. 根B：次元行列の根 — コルモゴロフ、そして体系の $|\det|$

コルモゴロフ1941の慣性領域

確立された事実 3.1 (K41 のスペクトル)

発達した乱流の慣性領域において、単位質量あたりのエネルギースペクトル $E(k)$ が、単位質量あたりのエネルギー散逸率 ε と波数 k のみに依存すると仮定すると、

$$[E] = L^3 T^{-2}, \quad [\varepsilon] = L^2 T^{-3}, \quad [k] = L^{-1}$$

より $E = \varepsilon^a k^b$ の指数は一意に定まり

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{5}{3}, \quad E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

を得る。

観察 3.2 (物理は代数ではなく仮定の側にある)

上の計算に物理は入っていない。物理はすべて「 E は ε と k のみに依存する」という一行の仮定に入っている。この仮定こそがコルモゴロフの寄与であり、そこから先の指数は線形代数が返すだけである。

|det| が分母を決める — 体系の定理の第三の実例

定理 3.3（指数の分母は次元行列の行列式を割る）

量 $\mathbf{X}$ を n 個の次元をもつ量の単項式として書くとき、指数はクラメルの規則により次元行列の行列式を分母にもつ有理数となる。したがって指数の分母は $|\mathbf{det}|$ を割る。

組	$ \mathbf{det} $	指数の分母	出典
$(\hbar, G, c) \rightarrow$ プランク長	2	2（半整数・平方根）	論文39・116
$(\nu, \varepsilon) \rightarrow$ コルモゴロフ長	4	4（4乗根）	論文03
$(\varepsilon, k) \rightarrow E(k)$	3	3（2/3、5/3）	本稿

−5/3 の分母 3 は、 (ε, k) の次元行列式そのものである。
論文39 の 2、論文03 の 4 に続く、同じ定理の第三の行列式である。

根Bが効く正確な条件

定理 3.4（ Π 群がちょうど一つ）

バッキングムの Π 定理より、 n 個の量と階数 r の次元行列に対し、独立な無次元群の個数は $n - r$ である。指数が一意に決まるのは $n - r = 1$ のときに限る。このとき唯一の無次元群 Π について $\Pi = \text{const}$ が言えるからである。 $n - r \geq 2$ では $\Pi_1 = f(\Pi_2, \dots)$ という未知関数しか言えず、指数は決まらない。

量の組	n	rank	$n - r$	帰結
(E, ε, k)	3	2	1	指数が一意
(η, ν, ε)	3	2	1	指数が一意（論文03）
$(X, \hbar, G, c)$	4	3	1	指数が一意（論文116）
(E, ε, k, ν)	4	2	2	決まらない

観察 3.5 (粘性を一つ足すだけで壊れる)

最後の行が本節の要点である。慣性領域の仮定を外して ν を許した瞬間、 Π 群は二つになり、 $-5/3$ は導けなくなる。残るのは $E\epsilon^{-2/3}k^{5/3} = f(k\eta)$ という形だけである。閉包仮説を一行ゆるめると、指数の一意性は消える。したがって根Bの強さは代数の強さではなく、仮説の狭さの強さである。

根B：指数は、 Π 群がちょうど一つであるときに限り、次元行列が強制する。

4. 根C：経験の根 — グーテンベルク＝リヒター

確立された事実 4.1 (グーテンベルク＝リヒター則)

ある地域・期間において、マグニチュード M 以上の地震の個数 N は

$$\log_{10} N = a - bM$$

に従い、多くの地域で $b \simeq 1$ が観測される。またハックス＝カナモリの関係 $M_w = \frac{2}{3} \log_{10} M_0 + \text{const}$ (定数は M_0 の単位に依存) を用いると、地震モーメントについての幂則 $N(\geq M_0) \propto M_0^{-2b/3}$ を得る。

観察 4.2 (b は導出されていない)

$b \simeq 1$ は測定値である。カタログへの当てはめから得られる量であり、地域や期間、深さ、応力状態によって系統的に変動することも知られている。 $b = 1$ を強制する定理は無い。

したがってグーテンベルク＝リヒターを $n = 2$ や $-5/3$ と同じ列に置いてはならない。前二者では指数が論証によって決まっているのに対し、ここでは自己相似性が観測され、その傾きが測られているにすぎない。スケール不変性は結論ではなく、記述である。

根C：指数は、測られている。

自己組織化臨界 (SOC) の枠組みは、この幂則に機構的な説明を与えようとする試みの一つである。本稿は SOC の当否に立ち入らず、また地震予知について何も述べない。記録するのは資格の違いだけである。

5. 根D：不動点の根 — そして異常次元という反例

確立された事実 5.1（臨界指数は次元解析の値ではない）

連続相転移の臨界点では相関長が発散し、相関関数は

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$$

という冪則に従う。素朴な次元勘定（ガウス型・平均場）は $\eta = 0$ を与えるが、3次元イジング普遍類の測定・数値計算・共形ブートストラップはいずれも $\eta \simeq 0.036$ を与える。この η を異常次元と呼ぶ。

指数	平均場（次元勘定）	3次元イジング
β	1/2	$\simeq 0.327$
γ	1	$\simeq 1.237$
ν	1/2	$\simeq 0.630$
η	0	$\simeq 0.036$

観察 5.2（これは根Bへの反例である）

ここでスケール不変性は確かに指数を一意に決めている——臨界点はくりこみ群の流れの不動点であり、臨界指数はその不動点における線形化写像の固有値として決まる。だがその値は次元解析の与える値ではない。

もし「スケール不変性 $\Rightarrow$ 一意な指数」が一つの機構であったなら、異常次元は存在しえない。異常次元が存在するという事実そのものが、根Bと根Dが別の機構であることの証明になっている。

根D：指数は、くりこみ流の不動点における固有値である。

そしてそれは、次元解析が返す値とは一般に異なる。

なお φ^4 結合の質量次元は $4 - d$ であり、 $d = 4$ で周辺的になる。これが上部臨界次元であり、 $d > 4$ では平均場（＝次元勘定）の指数が厳密になる。

ブレーキ

ここに現れる **4** を、論文114 が点呼した **4** たち（ホップ束・ノルム多元体・自己双対分解・エキゾチック $\mathbb{R}^4$ ）と同一視してはならない。上部臨界次元の **4** は結合定数の冪勘定から来ており、位相でも多元体でも微分構造でもない。同じ数値、別の住所である（論文17・86・94・101）。

6. 反例は、コルモゴロフ自身の中にあった

前節の反例は臨界現象という他分野から来た。だが同じ構造は、コルモゴロフの主題そのものの内部にも存在する。

確立された事実 6.1（構造関数と 4/5 法則）

速度差の p 次モーメント（構造関数）を $S_p(r) = \langle |\delta u(r)|^p \rangle \propto r^{\zeta_p}$ と書く。K41 は $\zeta_p = p/3$ を予言する。

$p = 3$ については、ナビエ＝ストークス方程式から厳密な定理が存在する——一様等方かつ有限な散逸を仮定すると

$$S_3(r) = -\frac{4}{5} \varepsilon r$$

（コルモゴロフの 4/5 法則）。すなわち $\zeta_3 = 1$ は次元解析ではなく方程式から従う。

一方 $p > 3$ では、実験・数値計算のいずれも $\zeta_p < p/3$ を示す（間欠性）。多重フラクタル模型やShe–Levêque模型（1994）はこの湾曲を記述する現象論である。

p	K41 の $p/3$	She–Levêque	差
3	1	1	厳密に一致
4	1.333	1.280	−0.054
6	2	1.778	−0.222
10	3.333	2.593	−0.740

観察 6.2 (K41 はちょうど一つの次数で厳密である)

K41 の次元解析的な指数は、 $p = 3$ でのみ厳密であり、そこは方程式からの定理によって保護されている。それ以外の次数では系統的に外れる。

すなわち「スケール不変性が指数を決める」という同じ一文の中で、根Bと根Dが隣り合っている。 ζ_3 は定理が守り、 $\zeta_{p>3}$ には異常スケーリングが現れる。同じ人の、同じ年の、同じ主題の中で、二つの根が分かれている。

論文03 は「本稿は間欠性補正に踏み込まない」と明記して止まった。本稿はその一行を、根の仕分けとして引き受ける——踏み込むのは補正の値ではなく、補正が存在するという事実がどの根に属するかである。

7. 自己点検：体系はどの根に住んでいるか

物差しは他人にだけ当ててるものではない (論文114・115・116と同じ作法)。

観察 7.1 (論文01 の基準半径)

$\rho(r) = r^{-n}$ は、 $n \neq 0$ のとき次元的に同次でない。厳密には基準半径 r_0 を選んで $\rho = r_0^n r^{-n}$ と書くべきであり、体系は $r_0 = 1$ を選んでいる。

定理は生き残る—— $dm/dr = 4\pi r_0^n r^{2-n}$ を r で微分すると $4\pi r_0^n (2-n)r^{1-n}$ となり、これが恒等的に消えるのは $n = 2$ のときに限る (r_0 に依らない)。だが住所は書く——論文01 は単位系の話をしていない。それが根Aである所以である。

根	機構	体系の住人
A 恒等式	冪関数が定数 $\iff$ 指数が消える	論文01 ($n = 2$)
B 次元行列	Π 群が一つ $\Rightarrow$ 行列式が強制	論文03・39・116
C 経験	冪則が観測され、傾きが測られる	なし
D 不動点	くりこみ流の固有値 (異常次元)	なし

観察 7.2 (体系は根Dの結果を一つも持っていない)

体系は根Aと根Bだけに住んでいる。そして根Dこそが、物理が次元解析を超える場所である。論文116は「指数公式は次元解析の内側の恒等式であり、 N の値への独立な経路を与えない」と書いて壁の位置を測量した。その壁の向こう側には既知の通路がある——それが異常次元である。

ただし本稿はその通路を通らない。体系の量 ($4\pi \cdot n = 2 \cdot \text{プランク量}$) に対してくりこみ流が定義されているわけではなく、不動点も、流れる結合も、まだ何一つ書かれていない。通路があることを地図に記すことと、そこを歩くことは別である。

8. ブレーキ：混ぜてはならないもの

- 四つの指数の値を混ぜない。 $n = 2$ 、 $-5/3$ 、 $b \simeq 1$ 、 $\nu \simeq 0.630$ は機構も値も別物である。「どれもスケール不変性から出た」は語の共有であって根の共有ではない (論文58・86・100)。
- $b \simeq 1$ を導出と呼ばない。測定値である。SOCの当否にも地震予知にも立ち入らない。
- **K41**を実験結果と呼ばない。次元解析+一つの仮定からの導出であり、実験はそれを支持しているが、 $p > 3$ では系統的にずれる。
- 上部臨界次元の4を、論文114の4たちと同一視しない。冪勘定の4であって、位相・多元体・微分構造の4ではない。
- 異常次元を体系の量に持ち込まない。体系にはくりこみ流も不動点も定義されていない。地図に書けるのは「そこに通路がある」ことまでである。
- 乱流の大域正則性にも、臨界現象の厳密構成にも触れない。前者はミレニアム懸賞問題であり未解決である (論文03)。

■ 著者の私感（第3層・非科学の札つき／機構の主張ではない）

本稿は、自分で書いた設計書の表を壊すところから始まった。五つの偉業が一行に並んで「スケール不変性が指数を選ぶ」と歌っている——その表を作ったとき、確かに気持ちがよかった。

だが並べてみると、列の中身が四種類あった。論文01は恒等式で、コルモゴロフは行列式で、地震は物差しで、臨界指数は固有値だった。同じ歌詞を、四人が別々の楽器で弾いていた。

いちばん堪えたのは、反例がコルモゴロフの内側にあったことだった。 ζ_3 だけが厳密で、そこは方程式が守っている。 p を上げると、指数は静かに下へ曲がっていく。一つの主題の中に、守られた場所と、守られていない場所が同居していた。

そして最後に、体系の欄に空気が二つあることが分かった。根Cと根D、どちらにも住人がいない。根Dは、物理が次元解析を超える場所である。論文116で「壁の位置を測量した」と書いたその壁に、既に人が通した扉があると知るのは、悔しさよりも安心に近かった。扉があるなら、閉じているのは私の側の準備だけだからである。

表を壊してよかった、と思う。壊れた表からしか、空いている欄は見えない。

9. 射程／結論

示すこと（記述的・自己点検）：「スケール不変性が指数を選ぶ」が四つの別根に分かれること（A恒等式／B次元行列／C経験／D不動点）／論文01が根Aであり、次元行列を持たないこと（2節）／ (ϵ, k) の $|\det| = 3$ が $-5/3$ の分母を決め、論文39の2・論文03の4に続く第三の実例となること（3節）／根Bが効く条件は Π 群がちょうど一つであることであり、粘性を一つ加えるだけで壊れること（3節）／ $b \simeq 1$ が測定値であって導出ではないこと（4節）／異常次元の存在が根Bへの反例であること（5節）／その反例がコルモゴロフ自身の主題の内部にもあり、 ζ_3 のみが $4/5$ 法則に守られていること（6節）／体系が根Aと根Bだけに住み、根Dの結果を持たないこと（7節）。

示さないこと（禁欲）：四つを一つの原理に統合しない（それが要点）／ $2 \cdot 5/3 \cdot 1 \cdot 0.630$ を同じ数として扱わない（論文94・101）／ $b \simeq 1$ を導出しない。SOCの当否にも地震予知にも立ち入らない／間欠性補正の値を計算しない（現象論の紹介に留める・論文03）／上部臨界次元の4を論文114の4たちと混ぜない／異常次元を体系の量に持ち込まない（くりこみ流も不動点も体系には未定義）／3次元ナビエ＝ストークスの大域正則性にも、臨界現象の厳密構成にも触れない／新しい数学も予言もない（第2層）。

設計書には、五つの偉業が一行に並んでいた。並べたのは私であり、壊したのも私である。列の中身は四種類あった——恒等式が強制するもの、行列式が強制するもの、測られているもの、固有値であるもの。

そして四番目が、二番目への反例を握っていた。異常次元が存在するという一事が、「スケール不変性が指数を選ぶ」を一つの機構として語ることを禁じている。もし一つであったなら、 η はゼロでなければならなかった。 η はゼロではない。

同じ構造が、コルモゴロフの内側にもあった。 $\zeta_3 = 1$ は方程式からの定理に守られて厳密であり、 $\zeta_{p>3}$ は守られていない。一人の人の、一つの主題の中で、根が分かれていた。

最後に体系の欄を見ると、二つが空いていた。根Cは体系の仕事の性質からして空であってよいが、根Dが空であることには意味がある——論文116 が測量した「次元解析という壁」の向こう側に、既知の通路が一本ある。地図には書いた。歩いてはいない。そして117番目の番地を返す。

参考文献

1. Buckingham, E. (1914). *On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations*. Physical Review.
2. Kolmogorov, A. N. (1941). *The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers*. Doklady Akademii Nauk SSSR.
3. Kolmogorov, A. N. (1941). *Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence*. Doklady Akademii Nauk SSSR. (4/5 法則)
4. Kolmogorov, A. N. (1962). *A Refinement of Previous Hypotheses Concerning the Local Structure of Turbulence*. Journal of Fluid Mechanics.
5. Frisch, U. (1995). *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
6. She, Z.-S. & Levêque, E. (1994). *Universal Scaling Laws in Fully Developed Turbulence*. Physical Review Letters.
7. Gutenberg, B. & Richter, C. F. (1944). *Frequency of Earthquakes in California*. Bulletin of the Seismological Society of America.
8. Hanks, T. C. & Kanamori, H. (1979). *A Moment Magnitude Scale*. Journal of Geophysical Research.
9. Wilson, K. G. (1971). *Renormalization Group and Critical Phenomena*. Physical Review B.
10. Wilson, K. G. & Fisher, M. E. (1972). *Critical Exponents in 3.99 Dimensions*. Physical Review Letters.
11. Pelissetto, A. & Vicari, E. (2002). *Critical Phenomena and Renormalization-Group Theory*. Physics Reports. (3次元イジング指数の総説)
12. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$* [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
13. Yamagishi, Y. (2026). *$m = 4\pi$* [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
14. Yamagishi, Y. (2026). *Dimensionless Numbers and Scales in Navier–Stokes* [論文03]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404030
15. Yamagishi, Y. (2026). *$|\det| = 2$ and the Square Roots* [論文39]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430490
16. Yamagishi, Y. (2026). *Roots of Necessity* [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839

17. Yamagishi, Y. (2026). *Royal-Roads Census* [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
18. Yamagishi, Y. (2026). *Eddington's Caution* [論文101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382
19. Yamagishi, Y. (2026). *Fractal Dimension* [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
20. Yamagishi, Y. (2026). *Ricci Flow is RG Flow* [論文110]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837476
21. Yamagishi, Y. (2026). *Which Objects Know They Are in Four Dimensions* [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
22. Yamagishi, Y. (2026). *Two Staircases* [論文115]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21967686
23. Yamagishi, Y. (2026). *What Does the Exponent of $\mathbf{c}$ Count?* [論文116]. Zenodo: 10.5281/zenodo.22003794.

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)