

集約の三つの別根

— 球殻定理・バーンズ＝ハット法・高速多重極法は、同じ展開の上で違う理由で項を捨てている（山岸・多重極集約理論の続篇） — [論文124]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

遠方にある多数の源を、少数の量で代表させてよい——この集約の許可は、少なくとも三つの場面で使われている。ガウスの法則、ニュートンの球殻定理、そして N 体計算のバーンズ＝ハット法と高速多重極法（FMM）である。論文51はこの許可の出所を一つに特定し、許可を与えているのは指数 $n=2$ であり 4π は答えに残らないと述べた。本稿はその特定がどこまで届いているかを測る。結論は、三つとも同じ展開の上に立ちながら、項を捨てる理由が三つとも違う、である。第一に、本当に共通しているものは一つだけあり、それは加法定理である。 $1/|x-y|$ のルジャンドル展開において、球殻定理は $l \geq 1$ の項が消えると言い、FMM は $l > p$ の項が小さいと言う。同じ展開、項を捨てる理由が別である（第2節）。第二に、三つの根の住所は次のとおりである。ガウスの法則は調和性のみを要し対称性を要しないが、得られるのは束であって場ではない（第3節）。球殻定理は調和性かつ対称性を要し、そのかわり誤差が厳密にゼロである（第4節・厳密積分で確認）。バーンズ＝ハット法と FMM は調和性も対称性も要さず、要するのは幾何的分離と核の滑らかさだけであり、そのかわり誤差はゼロにならない（第5節）。第三に、それゆえ論文51の帰属は球殻定理には届くが、FMM には届かない。指数が2でない核——二次元の $\log r$ 、湯川 e^{-r}/r 、ヘルムホルツ、 $1/r^4$ 、ガウシアン、 $1/\sqrt{r}$ ——のいずれでも遠方ブロックは低ランクに圧縮される（本稿で数値確認）。核非依存 FMM が存在すること自体が反例である（観察 5.4）。第四に、逆に論文51のもう一つの主張「 4π は答えに残らない」は、計算量の側から証明できる。 4π は核の全体因子であり、数値ランクも計算量もスケール不変だからである（核を $1, 4\pi, 1/4\pi, 10^6$ 倍してランクは 27 で不動）。 4π は複雑度に入れない（定理 6.1）。第五に、次元の入り方も別根である。FMM に次元が入るのは子ノード数 2^d と相互作用リスト長 $6^d - 3^d$ （三次元で 189 ）であって、 d について指数的である。体系の次元signature $n = d - 1$ は線形である（第7節）。新しい物理法則も新しい数学定理も主張しない。

本稿の射程：新しい物理法則も新しい数学定理も主張しない。ガウスの法則、球殻定理、多重極展開の加法定理、バーンズ＝ハット法（1986）、FMM（Greengard & Rokhlin 1987）、階層行列と核非依存 FMM による低ランク理論はいずれも確立済みである。本稿が加えるのは、どの許可がどの根に立っているかという帰属の判定だけである。

1. 記号と位置づけ

三次元ユークリッド空間で、源の集合 $\{y_j\}$ と評価点 x に対しラプラス核 $1/|x-y|$ を考える。「集約」とは、遠方の源の集合をそれより少数の量（総質量・重心・有限個の多重極モーメント）で置き換えてよい、という許可を指す。

圏の境界（論文51 が引いた線）：論文51 の第1.1節は遮断（culling）と集約（aggregation）を分けた。因果的地平線による源集合の有限化、およびプランク変位による有効数字閾値は遮断であって集約ではない。湯川型指数遮蔽は論文51 の定理2.1 が重力について撤回済みである。本稿が数える三つは、いずれもこの線の集約側にある。

位置づけ：本稿は論文51 の続篇であり、その第3版が到達した帰属を片側で狭め、片側で強める。

2. 一つだけ本当に共通しているもの：加法定理

命題 2.1 （ルジャンドル展開）

$r_{\min} = \min(|x|, |y|)$ 、 $r_{\max} = \max(|x|, |y|)$ 、 γ を x と y のなす角とすると

$$\frac{1}{|x-y|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{\min}^l}{r_{\max}^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (1)$$

この展開は源側の変数と評価側の変数を分離する。三つの集約はいずれもこの分離を使う。ここまでが共通である。

観察 2.2 （分かれ目は「なぜ項を捨ててよいか」）

(1) の $l=0$ 項は $1/r_{\max}$ であり、これがポテンシャルの指数 1、力の指数 2 を与える。指数はここに、被写体として住んでいる。問題は残りの項をどう扱うかであり、答えが三つに割れる。

集約	$l \geq 1$ の項の扱い	理由	誤差
ガウスの法則	積分で落ちる	調和性（束保存）	概念が無い（恒等式）
球殻定理	消える	調和性 かつ 対称性	厳密にゼロ
BH / FMM	小さい	分離 と 核の滑らかさ	ゼロにならない

3. 第一の根：ガウスの法則 — 調和性のみ

命題 3.1

閉曲面 S を貫く重力束は、内部の質量配置によらず $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G M_{\text{enc}}$ である。

観察 3.2（要件と代償）

この集約は対称性をまったく要さない。内部がどれほど歪んでいてもよい。そのかわり得られるのは束という一つの数であって、場そのものではない。誤差という概念が無い——これは近似ではなく恒等式だからである。

ここに $n = d - 1$ が住む（論文01・116）。表面積が r^{d-1} で増えるため、束が保存されるならば場は $r^{-(d-1)}$ で落ちる。これは次元と位相の話であって、近似の許可ではない。

4. 第二の根：球殻定理 — 調和性かつ対称性

命題 4.1（ニュートンの球殻定理）

球対称な殻の外部の場は、全質量が中心に集まった点源の場に厳密に等しい。

本稿による確認：半径 $a = 1$ の球面上の一様分布に対し、距離 $d = 10$ の点での $1/|x - y|$ の面平均を厳密に積分すると **0.1000000000000000** となり、単極子 $1/d$ との相対誤差は**機械精度でゼロ**である。

観察 4.2（二つの要件）

この厳密さには二つの条件が要る。(i) 核が調和的であること——三次元で $1/r$ 、一般には $r^{-(d-2)}$ 。 $1/r^3$ では成り立たない。(ii) 源が球対称であること。(1) の言葉でいえば、対称性ゆえに $l \geq 1$ のモーメントがすべて零になる。

観察 4.3（論文51 が挙げたのは (i) である）：論文51 は許可の出所を指数 $n = 2$ に帰した。指数は (i) の言い換えであり、正しい。第2版・第3版がここまで到達したことは動かない。本稿が加えるのは、誤差をゼロにしているのは (ii) の側だ、ということである。(i) だけでは点源に潰す許可は出ない。

5. 第三の根：バーンズ＝ハット法と FMM — 分離と滑らかさ

5.1 誤差はゼロにならない

観察 5.1（BH と FMM が相手にするのは殻ではなく塊である）

八分木の一区画に入った粒子群は球対称ではない。したがって観察 4.2 の (ii) が成り立たず、球殻定理は適用できない。

本稿による確認：視線方向に $\pm a$ の位置に等質量を置き（重心は原点）、距離 $d = 10$ で単極子近似の相対誤差を厳密に計算する。

a	単極子の相対誤差	$(a/d)^2$	比
1.000	1.010101×10^{-2}	1.0×10^{-2}	1.0101
0.500	2.506266×10^{-3}	2.5×10^{-3}	1.0025
0.250	6.253909×10^{-4}	6.25×10^{-4}	1.0006
0.125	1.562744×10^{-4}	1.5625×10^{-4}	1.0002

誤差は四重極そのものであり、 $(a/d)^2$ で落ちるが決してゼロにならない。 p 項で打ち切れば $(a/d)^{p+1}$ である（Greengard & Rokhlin の誤差評価）。

観察 5.2 （したがって根が違う）

球殻定理は対称性ゆえに項が消える。FMM は分離ゆえに項が小さい。前者には打ち切り次数 p が無く、後者には p がある。 p という変数の有無が、二つの根が別であることの署名である。

5.2 指数が 2 でない核でも効く

定理 5.3 （低ランク分離可能性が真の許可証である）

遠方の源箱と評価箱が well-separated であるとき、その相互作用行列ブロックは数値的に低ランクである。FMM の $O(N)$ はこの低ランク性から出るのであって、核の指数から出るのではない。

本稿による確認：各 400×400 の遠方ブロックについて、相対しきい値 10^{-8} での数値ランクを測る。

核	指数	数値ランク
$1/r$ （三次元ラプラス）	$n = 2$	27
$\log r$ （二次元）	$n = 1$	29
e^{-r}/r （湯川）	指数減衰	37
$\cos(5r)/r$ （ヘルムホルツ）	振動	105
$1/r^4$	$n = 4$	51
e^{-r^2} （ガウシアン）	非調和	85
$1/\sqrt{r}$	$n = 1/2$	29

どれも圧縮される。調和的でない核（ガウシアン）でも、指数が 2 でない核でも、二次元でも成り立つ。必要なのは対角から離れた場所での核の滑らかさだけである。

観察 5.4（核非依存 FMM の存在それ自体が反例である）

核を明示的に展開せず、等価曲面上の値だけで同じ $O(N)$ を達成する核非依存 FMM（Ying, Biros & Zorin 2004）と black-box FMM（Fong & Darve 2009）が存在する。アルゴリズムが核の関数形を知らないまま動く以上、 $n = 2$ が許可証でありうる余地はない。階層行列の理論（Hackbusch 1999）は同じことを一般の漸近的に滑らかな核について述べている。

系 5.5（計算量の小訂正）

FMM は $O(N)$ であり、 $O(N \log N)$ はバーンズ＝ハット法である。論文51 は両者を一括して $O(N \log N)$ と書いていた。二つは根も計算量も違う。

6. 4π は複雑度に入れない

定理 6.1

核 K を定数 $\alpha \neq 0$ 倍しても、相対しきい値で測った数値ランクは変わらない。したがって階層的低ランク法の計算量は核の全体因子に依存しない。

証明：特異値は $\sigma_i(\alpha K) = |\alpha| \sigma_i(K)$ であり、比 σ_i/σ_1 は α に依存しない。相対しきい値はこの比だけで決まる。（証明終）

本稿による確認： $1/r$ を $1, 4\pi, 1/(4\pi), 10^6$ 倍しても数値ランクはすべて 27。

観察 6.2（体系の全体因子チェックがそのまま効く）

規格化された量に全体因子としてしか入らない機構は、定義上検証不能である。 4π は FMM の複雑度に対してまさにその立場にある。したがって論文51 の「 4π は答えに残らない」は、球殻定理での相殺という幾何の議論とは独立に、計算量の側からも成り立つ。本稿は51 のこの主張を弱めるのではなく、二本目の脚を与える。

観察 6.3 （FMM に実際に現れる数）

FMM の費用に現れるのは 4π ではなく、打ち切り次数 p に対する項数 $(p + 1)^2$ と、八分木の格子から出る 27 と 189 である。球の数ではなく立方格子の数である。

7. 次元の入り方も別根

命題 7.1

d 次元の階層木において、子ノード数は 2^d 、相互作用リスト長は $6^d - 3^d$ である（親の近傍 3^d 個の子 6^d 個から、自分の近傍 3^d 個を除く）。

d	子ノード 2^d	相互作用リスト $6^d - 3^d$	体系の指数 $n = d - 1$
2	4	27	1
3	8	189	2
4	16	1215	3
8	256	1673055	7

観察 7.2

FMM の次元signature は d について指数的であり、これが「FMM は二次元・三次元の方法である」ことの理由（次元の呪い）である。体系の次元signature $n = d - 1$ は線形である。同じ「次元」という語が、二つの別の住所を持つ（論文114・116）。

8. 論文51 への訂正と、二つの 2 の住所

観察 8.1 (訂正)

論文51 の要旨は、球殻定理を「 N 体計算においてバーンズ=ハット法や高速多重極法が $O(N^2)$ を圧縮できる根拠でもある」と述べた。この一行は強すぎる。球殻定理は対称な殻についての厳密な言明であり、BH と FMM が扱うのは非対称な塊で、誤差はゼロにならない (第5節)。51 の帰属は球殻定理までであって、FMM には届いていない。

観察 8.2 (体系の型がまた出た)

これは体系が繰り返し名指ししてきた形である——訂正が定理に届いていない (論文49・50・51・55)。論文51 は初版の 4π 帰属を $n=2$ へ正しく訂正したが、その $n=2$ が届く範囲を測っていなかった。

観察 8.3 (同じ 2 が二つの住所にある)

論文01 の $n=2$ は密度分布の指数 $\rho \propto r^{-2}$ であり、球殻定理の $n=2$ は力の指数 $F \propto r^{-2}$ である。両者は同じ分布を指していない。実際 $\rho \propto r^{-2}$ が作る内部質量は $m(r) = 4\pi r$ であり、その力は

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2} = \frac{4\pi G}{r} \propto \frac{1}{r}$$

であって $1/r^2$ ではない。どちらの言明も正しく、指しているものが違う。論文17 が要求したとおり、別根と言うだけでは半分であり、住所を書いて初めて検査できる。

9. 結論

1. 本当に共通しているものは加法定理ひとつである (命題 2.1)。三つの集約はいずれも (1) の分離を使う。共通しているのは機械であって根ではない。
2. ガウスの法則は調和性のみを要し対称性を要さないが、得られるのは束であって場ではなく、誤差の概念が無い (第3節)。
3. 球殻定理は調和性かつ対称性を要し、そのかわり誤差が厳密にゼロである (第4節・厳密積分で確認)。ゼロにしているのは対称性の側である。

4. バーンズ=ハット法と **FMM** は調和性も対称性も要さず、分離と核の滑らかさだけを要し、そのかわり誤差はゼロにならず $(a/d)^{p+1}$ で落ちる（第5節・比が $1.0101 \rightarrow 1.0002$ と $(a/d)^2$ に収束することを確認）。
5. **FMM** の許可証は低ランク分離可能性であって $n = 2$ ではない（定理 5.3）。 $\log r \cdot$ 湯川・ヘルムホルツ・ $1/r^4 \cdot$ ガウシアン・ $1/\sqrt{r}$ のいずれでも圧縮される。核非依存 **FMM** の存在それ自体が反例である（観察 5.4）。
6. 4π は複雑度に入れない（定理 6.1）。核の全体因子は相対しきい値のランクを変えない。論文51 の「 4π は答えに残らない」に、計算量からの二本目の脚が付く。
7. 次元の入り方も別根：**FMM** は 2^d と $6^d - 3^d$ で指数的、体系の $n = d - 1$ は線形（第7節）。
8. 論文51 への訂正：球殻定理を BH・**FMM** の根拠と呼んだ一行は強すぎる（観察 8.1）。また **FMM** は $O(N)$ 、 $O(N \log N)$ はバーンズ=ハットである（系 5.5）。
9. 論文01 の 2 は密度の指数、球殻定理の 2 は力の指数であり、 $\rho \propto r^{-2}$ の作る力は $1/r$ である（観察 8.3）。

結語：一つの機械を共有していることは、一つの根を共有していることではない。三つの集約は同じ展開の上に立ち、同じ記号で項を書き、そして違う理由でその項を捨てている。捨てる理由を言えるようになって初めて、どこまで捨てられるかが言える。

参考文献

1. Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Book I, Propositions 70--71.
2. Barnes, J. & Hut, P. (1986). *A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm*. Nature, 324, 446--449.
3. Greengard, L. & Rokhlin, V. (1987). *A fast algorithm for particle simulations*. Journal of Computational Physics, 73(2), 325--348.
4. Hackbusch, W. (1999). *A sparse matrix arithmetic based on $\mathcal{H}$ -matrices. Part I: Introduction to $\mathcal{H}$ -matrices*. Computing, 62(2), 89--108.
5. Dongarra, J. & Sullivan, F. (2000). *Guest editors' introduction: The top 10 algorithms*. Computing in Science & Engineering, 2(1), 22--23.
6. Ying, L., Biros, G. & Zorin, D. (2004). *A kernel-independent adaptive fast multipole algorithm in two and three dimensions*. Journal of Computational Physics, 196(2), 591--626.
7. Fong, W. & Darve, E. (2009). *The black-box fast multipole method*. Journal of Computational Physics, 228(23), 8712--8725.
8. 山岸勇輝 (2026). $n = 2$ 唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
9. 山岸勇輝 (2026). 4π 質量相殺定理 [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
10. 山岸勇輝 (2026). 別根であるだけでは半分である [論文17], 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
11. 山岸勇輝 (2026). $4\pi G$ の中の二つの 4π [論文35], 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430118
12. 山岸勇輝 (2026). 面積は立体角ではない [論文45], 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602337

13. 山岸勇輝 (2026). 山岸・重力多重極集約理論 [論文51], 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602935
14. 山岸勇輝 (2026). 必然性の四つの根 [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
15. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
16. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
17. 山岸勇輝 (2026). 誰が自分が4次元にいることを知っているか [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
18. 山岸勇輝 (2026). c の指数は何を数えているか [論文116]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22003794

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)