

積分因子の存在は、温度を与えない

— カラテオドリの公理化を三段に分ける：非到達可能性・フロベニウス・複合系（山岸・熱力学第二法則の点呼） — [論文126]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

カラテオドリ（1909）は熱力学第二法則を、たった一つの物理の文に還元した——「任意の状態のどんな近傍にも、そこから断熱的に到達できない状態が存在する」。そこから $\delta Q = T dS$ が導かれる。本稿はこの導出を三段に分け、それぞれの段が何を与え、何を与えないかを点呼する。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、三段は次のとおりである。(a) 非到達可能性 $\Rightarrow$ 可積分性（カラテオドリの定理）、(b) 可積分性 $\Rightarrow$ 積分因子の存在（フロベニウス）、(c) 複合系の要請 $\Rightarrow$ 普遍温度の一意化。三段目は、しばしば省略される。第二に、これが本稿の芯である。積分因子の存在は、温度を与えない。 $\delta Q = \lambda d\varphi$ が成り立つとき、任意の単調関数 g について $\delta Q = (\lambda/g'(\varphi)) d(g(\varphi))$ も同じく成り立つ（本稿で記号計算により確認）。存在は、どれかを決めない。普遍的な温度を取り出すには、複合系という別の物理的要請が要る。これは論文113が別の場所で示した形と同じである——安定性の論法は「存在」までを与え、「値」は与えない。第三に、より驚くべきこと。二変数の状態空間では、積分因子は数学だけで存在する。平面上のピファフ形式には常に積分因子がある（本稿で具体例により確認）。ところが単純圧縮系の状態空間は二変数である（たとえば U と V ）。したがって単純系に限れば、 $\delta Q = T dS$ は物理の公理を一切必要としない。第二法則の中身が現れるのは、変数が三つ以上——すなわち複合系——においてである。第四に、三変数では実際に破れる。接触形式 $\omega = dz - y dx$ は $\omega \wedge d\omega = dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$ を満たし、積分因子を持たない。そして同時に、 $\omega = 0$ に沿って任意の二点が結んでしまう。非到達可能性の破れと、可積分性の破れが、同時に起きている——カラテオドリの定理が結んでいるのは、まさにこの二つである（第4節）。第五に、 δ は d ではない。 δQ は完全微分ではなく、 dS は完全微分である。両者は同じ「微分」という語で呼ばれながら、別の圏に属する。積分因子 $1/T$ は、一方を他方へ変換する装置である（第6節・論文16）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。カラテオドリの公理化（1909）、フロベニウスの可積分条件、接触形式の非可積分性、積分因子の非一意性はいずれも標準的な内容である。本稿が加えるのは、導出を三段に分け、各段の与えるものと与えないものを書き分けたことだけである。

1. 記号と位置づけ

熱力学第二法則には、いくつかの定式化がある。クラウジウス、ケルヴィン＝プランク、そしてカラテオドリ。本稿が扱うのはカラテオドリの定式化であり、それを選ぶ理由は一つである。

この定式化は、物理と数学の境目を、他のどの定式化よりも鋭く引く。物理の主張は一文しかない。残りはすべて、ピファフ形式についての数学である。どこまでが物理で、どこからが数学かを点呼するには、これ以上の題材がない。

位置づけ：本稿は既存の定理の段の分け方を扱う。新しい定理は主張しない。

2. カラテオドリが立てた、たった一つの物理の文

公理（カラテオドリ 1909）：任意の状態の、どんな近傍の中にも、そこから断熱的な操作では到達できない状態が存在する。

観察 2.1（これが物理のすべてである）

この一文の外に、物理的な仮定は置かれていない。熱機関も、循環過程も、クラウジウスの不等式も出てこない。以後に現れるのは、ピファフ形式 δQ についての数学だけである。

なぜこの文が「第二法則」なのか：断熱操作は、 $\delta Q = 0$ を満たす経路である。到達できない状態があるということは、 $\delta Q = 0$ という条件が、状態空間に何らかの層構造を刻んでいるということである。その層に貼る目盛りが、エントロピーになる。

3. 第一段：非到達可能性から、可積分性へ

定理 3.1（カラテオドリの定理・標準）

ピファフ形式 ω が、任意の点の任意の近傍に、 $\omega = 0$ に沿って到達できない点を持つならば、 ω は可積分である（すなわち $\omega \wedge d\omega = 0$ ）。

観察 3.2（この段が与えるもの）

物理の言葉（到達できない状態がある）を、幾何の言葉（形式が可積分である）へ翻訳した。ここで物理は使い切られる。以後、公理はもう登場しない。

4. 第二段：可積分性から、積分因子の存在へ

定理 4.1（フロベニウス・標準）

$\omega \wedge d\omega = 0$ ならば、局所的に $\omega = \lambda d\varphi$ と書ける。

観察 4.2（破れる例を、実際に置く）

この条件が本当に条件であることを確かめておく。接触形式

$$\omega = dz - y dx \tag{1}$$

を取る。 $d\omega = dx \wedge dy$ であり、

$$\omega \wedge d\omega = (dz - y dx) \wedge (dx \wedge dy) = dz \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$$

（第二項は $dx \wedge dx = 0$ で消える。最後の等号は巡回置換）。したがって積分因子は存在しない。

そして同時に、 $\omega = 0$ すなわち $dz = y dx$ に沿って、 $\mathbb{R}^3$ の任意の二点が結べてしまう（接触分布はブラケット生成的であり、チョウ＝ラシェフスキーの定理による）。

観察 4.3（二つの破れは、同時に起きる）

到達不能性が破れ、可積分性も破れた。カラテオドリの定理が結んでいるのは、まさにこの二つである。一方が成り立たなければ、他方も成り立たない。

5. 第三段：存在は、値を与えない

ここからが本稿の芯である。

命題 5.1（積分因子は、決して一意でない）

$\delta Q = \lambda d\varphi$ が成り立つとする。このとき任意の単調な関数 g について

$$\frac{\lambda}{g'(\varphi)} d(g(\varphi)) = \frac{\lambda}{g'(\varphi)} \cdot g'(\varphi) d\varphi = \lambda d\varphi = \delta Q$$

が成り立つ（本稿で記号計算により確認）。すなわち (λ, φ) の組は、無限に多く存在する。

観察 5.2（したがって、まだ温度ではない）

フロベニウスが与えたのは「そういう組が存在する」ことだけである。どの λ を温度と呼ぶべきかは、まだ何も決まっていない。

観察 5.3（一意化には、別の物理が要る）

普遍的な温度を取り出す段は、二つの系を熱的に接触させるという、新たな物理的設定を必要とする。合成系にも共通の積分因子が存在することを要求すると、 λ が経験温度だけの普遍関数と、系ごとの因子との積に分解されることが強制される。その普遍関数が、絶対温度である。

これは第三の段であり、前二段からは出てこない。

観察 5.4（体系の中に、同じ形がある）

論文113 は、安定性の論法について同じことを述べた——論法が与えるのは「存在」までであり、「値」は測定が与える。

住所は違う。論文113 が扱ったのは束縛状態の存在論法であり、本稿が扱うのは微分形式の可積分性である。分野も道具も別である。だが形は同じである——存在定理は、存在しか与えない。

6. 第二法則の中身は、どこから現れるのか

命題 6.1 (二変数では、積分因子は常に存在する)

平面上のピファフ形式 $\omega = P dx + Q dy$ には、常に局所的な積分因子が存在する (一階常微分方程式の存在定理による)。

確認 (本稿による) : $\omega = y dx + 2x dy$ は完全微分ではない ($\partial_y P - \partial_x Q = -1 \neq 0$)。ところが $\lambda = y$ を掛けると $y^2 dx + 2xy dy$ となり、これは $d(xy^2)$ に等しい。完全微分になった。

観察 6.2 (そして、単純系の状態空間は二変数である)

単純圧縮系では $\delta Q = dU + P dV$ であり、状態変数は (U, V) の二つである。

したがって、単純系に限れば、 $\delta Q = T dS$ は数学だけで成り立つ。物理の公理は一切要らない。

観察 6.3 (第二法則の中身が現れるのは、三変数以上である)

カラテオドリの公理が実際に働くのは、状態空間が三変数以上のとき——すなわち複合系においてである。そこで初めて、共通の積分因子の存在が自明でなくなる。

これは、体系が繰り返し出会ってきた形である——ある次元を超えて初めて、内容が現れる (論文114・105)。ここでの閾値は三である。

7. δ は、 d ではない

観察 7.1 (記号が圏を告げている)

δQ と dS は、どちらも「微分」と呼ばれる。だが δQ は完全微分ではなく、 dS は完全微分である。前者は経路に依存し、後者は依存しない。

δ という記号は、この違いを告げるために存在する。ところが読むほうは、しばしば同じ「微分」として扱ってしまう。

観察 7.2（では、 $\delta Q = T dS$ の等号はどの根か）

論文16 は等号に六つの根を数えた。この式のそれは、定義／代入の帰結／恒等式／条件式／経験則／次元的に空のどれか。

答えは、立つ場所が変わる。カラテオドリの道筋の内側では、 T と S はこの式によって定義される——公理が「そういう分解が存在する」ことを保証したうえで、その分解に名前を与えている。つまり定義である。一方、 T と S を別の方法（理想気体温度計、統計力学の状態数）で先に定めておけば、この式は確かめるべき主張になる。

同じ式が、どちらの道を来たかで、根が変わる。これは論文16 が述べたことの、熱力学における実例である。

8. どこまでが物理で、どこからが数学か

段	何を与えられるか	物理か数学か
公理（非到達可能性）	出発点	物理（ただ一文）
第一段（カラテオドリ）	可積分性 $\omega \wedge d\omega = 0$	数学
第二段（フロベニウス）	積分因子の存在	数学
第三段（複合系）	普遍温度の一意化	物理（第二の要請）

観察 8.1（物理は一文ではなく、二文だった）

カラテオドリの定式化は「物理の仮定は一つだけ」としてしばしば紹介される。だが点呼をとると、物理の要請は二つある——非到達可能性と、複合系に共通の積分因子があること。二つ目は、しばしば数学の中に紛れて語られる。

これは訂正であって、批判ではない。カラテオドリ自身は複合系の議論を行っている。省略しているのは、後世の紹介のほうである。

9. 結論

1. 導出は三段である：非到達可能性 $\Rightarrow$ 可積分性（カラテオドリ）、可積分性 $\Rightarrow$ 積分因子の存在（フロベニウス）、複合系 $\Rightarrow$ 普遍温度の一意化。三段目はしばしば省略される。
2. 積分因子の存在は、温度を与えない（命題5.1）。 $\delta Q = \lambda d\varphi$ なら、任意の単調 g について $(\lambda/g') d(g(\varphi))$ も同じ形を与える。存在は、どれかを決めない。
3. 同じ形が体系にある（観察5.4）。論文113：安定性の論法は「存在」までを与え、「値」は測定が与える。住所は違うが、形は同じである。
4. 二変数では、積分因子は数学だけで存在する（命題6.1・本稿で例示）。そして単純圧縮系の状態空間は二変数である。したがって単純系に限れば $\delta Q = T dS$ に物理の公理は要らない。第二法則の中身が現れるのは三変数以上＝複合系である（観察6.3）。
5. 三変数では実際に破れる（観察4.2）。接触形式 $dz - y dx$ は $\omega \wedge d\omega \neq 0$ で積分因子を持たず、同時に任意の二点が到達可能になる。二つの破れは同時に起きる。
6. δ は d ではない（第7節）。積分因子 $1/T$ は非完全微分を完全微分へ変換する装置である。そして $\delta Q = T dS$ の等号は、カラテオドリの道の内側では定義であり、外側では検証すべき主張である（論文16）。
7. 物理の要請は、一つではなく二つだった（観察8.1）。非到達可能性と、複合系の共通因子。カラテオドリ自身は両方を扱っている。省略しているのは後世の紹介である。

結語：カラテオドリの公理化は、熱力学の中で物理と数学の境目が最も鋭く引かれた場所である。だからこそ、そこで境目がどこにあるかを数え違えることも起きる。存在定理は、存在しか与えない。温度という値が欲しければ、もう一段、物理を置かなければならない。

参考文献

1. Carathéodory, C. (1909). *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik*. Mathematische Annalen, 67.
2. Born, M. (1921). *Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik*. Physikalische Zeitschrift, 22.
3. Frobenius, G. (1877). *Über das Pfaffsche Problem*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 82.
4. Chow, W.-L. (1939). *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*. Mathematische Annalen, 117.
5. Buchdahl, H. A. (1966). *The Concepts of Classical Thermodynamics*. Cambridge University Press.
6. 山岸勇輝 (2026). 等号には六つの根がある [論文16], 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
7. 山岸勇輝 (2026). リューヴィルと時間の矢 [論文77]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21722473
8. 山岸勇輝 (2026). 摩擦は粗視化である [論文78]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21731937
9. 山岸勇輝 (2026). 必然性の四つの根 [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
10. 山岸勇輝 (2026). 二つのエントロピーを混同しない [論文88]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21747809

11. 山岸勇輝 (2026). 共有されたアルファベット [論文92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
12. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
13. 山岸勇輝 (2026). 極限としてのモジュール [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
14. 山岸勇輝 (2026). 二つの時計、一つの尺度 [論文118]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22036237
15. 山岸勇輝 (2026). 第四の時計 [論文119]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22036353
16. 山岸勇輝 (2026). 集約の三つの別根 [論文124]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22057728

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)