

同じ「正準交換関係」が、三つの別の状況を指している

— ストーン＝フォン・ノイマンの一意性はどこで現れ、どこで消えるか（山岸・別根点呼の作用素代数版） — [論文127]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

論文54 第3版は、パウリの定理が要求するのは正準交換関係ではなくワイル関係であることを示し、そこで止めた。本稿はその続きを書く——ワイル関係は、何を与えるのか。答えは一意性であり、しかもその一意性は狭い柵の内側にしか存在しない。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、同じ「正準交換関係」という語が、三つの別の状況を指している。(a) 稠密領域上の交換関係のみを課す場合——既約表現は互いに同値でないものが複数存在する（ネルソン 1959 の反例）。(b) ワイル関係を課し、かつ自由度が有限で可分な空間の既約表現に限る場合——ちょうど一つ（ストーン＝フォン・ノイマンの定理 1930/31）。(c) ワイル関係を課しても自由度が無限の場合——再び非可算個の非同値な表現が現れる（場の理論。ハーグの定理 1955 はその物理的帰結）。第二に、これが本稿の芯である。一意性は、真ん中の行にしかない。関係を弱めれば失われ、自由度を無限にすればまた失われる。一意性は、両側から柵で囲まれた狭い領域にだけ現れる。そして閾値は自由度の個数——有限か、無限かである（第5節）。第三に、なぜワイル形が要るのかは、有限次元で確かめられる。交換関係の両辺のトレースを取ると、左辺は巡回性からゼロ、右辺は空間の次元に比例する。したがって有限行列では交換関係は成り立たない（本稿で確認）。作用素は非有界でなければならない、非有界であれば定義域が問題になる。ワイル形は有界なユニタリだけで書かれており、定義域の問題を持たない——だからこそ、そこでだけ一意性が言える（第3節）。第四に、ガラボンの反例の住所が特定できる。論文54 が引いたガラボン（2002）の構成——下に有界なハミルトニアンに正準共役な有界自己共役時間演算子——は、上の (a) の行に住んでいる。交換関係だけを課し、ワイル関係を課していないからこそ存在できる。もしワイル関係を課せば、ストーン＝フォン・ノイマンによってシュレーディンガー表現に強制され、パウリの議論が走る。ガラボンの構成は、ストーン＝フォン・ノイマンの柵の外側にある（第6節）。第五に、論文126 との対をなす。論文126 は存在定理は存在しか与えないと述べた。本稿が扱うのは一意性定理である。存在と一意性は別の配達物であり、それぞれに別の条件がつく（第7節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。ストーン＝フォン・ノイマンの定理（1930/31）、ネルソンの反例（1959）、無限自由度における非同値表現の存在、ハーグの定理（1955）はいずれも標準的な内容である。本稿が加えるのは、これらを一つの点呼表に並べ、一意性が現れる範囲を柵として書いたこと、および論文54 が開けたままにした箇所を埋めたことだけである。

1. 記号と位置づけ

論文54 第3版が到達した地点：パウリの定理——エネルギーが下に有界であれば、それに正準共役な自己共役な時間演算子は存在しない——の証明が実際に使っているのは、正準交換関係ではなくワイル関係である。稠密領域上の交換関係はワイル関係を含意しない。

そこで論文54 は止まった。「ワイル関係が要る」とだけ述べ、「ではワイル関係は何を与えるのか」を書かなかった。

本稿はその一行を埋める。

位置づけ：既存の定理を並べ直し、その射程を書く。新しい定理は主張しない。

2. なぜ、定義域の話が避けられないのか

命題 2.1 （交換関係は有限行列では成り立たない）

$QP - PQ = i\hbar I$ を満たす有限次元の行列 Q, P は存在しない。

証明：両辺のトレースを取る。左辺はトレースの巡回性から

$$\mathrm{tr}(QP - PQ) = \mathrm{tr}(QP) - \mathrm{tr}(PQ) = 0$$

であり、右辺は $\mathrm{tr}(i\hbar I) = i\hbar n$ である。したがって $n = 0$ 。（証明終）

観察 2.2 （ここから全部が始まる）

この一行が、以後のすべての面倒の出所である。 Q と P は非有界でなければならず、無限次元の空間に住むしかない。非有界作用素は全空間では定義されない——定義域を指定しなければ、そもそも作用素として定まらない。

そして「稠密な領域の上で交換関係が成り立つ」という言明は、その領域の外について何も言っていない。

3. ワイル形は、定義域の問題を持たない

定義 3.1 (ワイル関係)

$U(a) = e^{ia\hat{P}/\hbar}$ 、 $V(b) = e^{ib\hat{Q}/\hbar}$ と置くとき、

$$U(a)V(b) = e^{iab/\hbar} V(b)U(a) \quad (2)$$

観察 3.2 (形式的には交換関係と同じことを言っている)

$[\hat{Q}, \hat{P}]$ が中心的であるとき、ベーカー＝キャンベル＝ハウズドルフの公式から (2) が形式的に従う (本稿で係数を確認した)。

観察 3.3 (だが決定的な違いがある)

(2) に現れる $U(a)$ と $V(b)$ はユニタリ作用素であり、したがって有界である。有界作用素は空間全体で定義される。定義域の問題が存在しない。

したがって、交換関係からワイル関係を導く操作——非有界作用素を指数の内側から外へ通す操作——こそが、正当化を要する箇所である。そして稠密領域上の交換関係は、それを保証しない (ネルソンの反例)。

4. ストーン＝フォン・ノイマンの定理が与えるもの

定理 4.1 (ストーン＝フォン・ノイマン 1930/31・標準)

有限個の自由度に対し、可分ヒルベルト空間上の強連続なユニタリ群によるワイル関係 (2) の既約表現は、ユニタリ同値を除いてただ一つであり、それはシュレーディンガー表現である。

観察 4.2 (これがワイル関係の対価である)

論文54 は「ワイル関係が要る」と述べた。その代わりに得られるものが、この一意性である。

条件を数える。この定理は四つの条件を要求している——(i) ワイル関係（交換関係では足りない）、(ii) 有限自由度、(iii) 既約、(iv) 可分かつ強連続。どれか一つを外すと、一意性は失われる。

5. 一意性は、両側から柵で囲まれている

観察 5.1（三つの状況を並べる）

何を課すか	既約表現の個数	典拠
稠密領域上の交換関係のみ	同値でないものが複数	ネルソン 1959 の反例
ワイル関係・有限自由度	ちょうど一つ	ストーン＝フォン・ノイマン
ワイル関係・無限自由度	非可算個	場の理論・ハーク 1955

観察 5.2（一意性は真ん中にしかない）

関係を弱めれば一意性は失われ、自由度を無限にすればまた失われる。一意性が現れるのは、両側を柵で挟まれた狭い領域だけである。

観察 5.3（閾値は自由度の個数である）

上の表で二行目と三行目を分けているのは、課す関係ではない。どちらもワイル関係である。分けているのは、自由度が有限か無限かという一点だけである。

これは体系が繰り返し出会ってきた形である——ある閾値を境に、内容が変わる（論文114・105、そして論文126の「三変数」）。ここでの閾値は有限と無限の境目である。

観察 5.4（物理的な帰結）

三行目の非同値性は、場の理論において相互作用描像が厳密には存在しないという形で現れる（ハークの定理）。自由場の表現と相互作用する場の表現は、ユニタリ同値ではない。これは技術的な不便ではなく、二行目の柵が外れたことの直接の現れである。

6. ガラポンの反例の住所

観察 6.1（論文54 が引いた構成の位置）

論文54 第3版は、ガラポン（2002）が下に有界なハミルトニアンに正準共役な、有界自己共役時間演算子を構成していることを引き、パウリの定理の言明を「ワイル関係を満たす自己共役な時間演算子は存在しない」へ弱めた。

本稿は、その構成がどこに住んでいるかを書く。

観察 6.2（一行目に住んでいる）

ガラポンの構成が可能なのは、交換関係だけを課し、ワイル関係を課していないからである。すなわち観察5.1 の表の一行目に位置する。

観察 6.3（もしワイル関係を課したら）

ストーン＝フォン・ノイマンの定理により、表現はシュレーディンガー表現に強制される。そこではパウリの議論——エネルギーの平行移動が生成され、下に有界というスペクトルの性質と矛盾する——がそのまま走る。

したがってガラポンの構成は、ストーン＝フォン・ノイマンの柵の外側にある。矛盾ではない。定理が及んでいない場所に立っているだけである。

これが「住所を書く」ということである（論文17）。「パウリの定理には反例がある」と言うだけでは半分であり、その反例がどの条件を外したところに立っているかを書いて、初めて検査できる。

7. 存在と一意性は、別の配達物である

観察 7.1（論文126 との対）

論文126 は、フロベニウスの定理について存在定理は存在しか与えないと述べた——積分因子が存在することは、どれが温度かを決めない。

本稿が扱うのは、その反対側である。ストーン＝フォン・ノイマンは一意性定理であり、どれかを決めてくれる。

	何を与えるか	代価として何を要求するか
フロベニウス（論文126）	存在のみ	可積分性
ストーン＝フォン・ノイマン	一意性	ワイル関係・有限自由度・既約・可分

観察 7.2（一意性のほうが高くつく）

条件の数を見れば分かる。存在を言うのは安く、一意性を言うのは高い。そして高い代価を払える範囲が、そのまま柵の内側になる。

「一意性定理がある」と聞いたら、まずその柵を数えること。

8. 結論

1. 同じ「正準交換関係」という語が、三つの別の状況を指している（観察5.1）。稠密領域上の交換関係のみ（複数の非同値表現）／ワイル関係・有限自由度（ちょうど一つ）／ワイル関係・無限自由度（非可算個）。
2. 一意性は、真ん中の行にしかない（観察5.2）。関係を弱めても、自由度を無限にしても失われる。一意性は両側を柵で挟まれた狭い領域にだけ現れる。
3. 二行目と三行目を分けているのは、課す関係ではない（観察5.3）。どちらもワイル関係である。分けているのは自由度が有限か無限かという一点だけであり、これが閾値である。
4. 定義域の話が避けられない理由は、有限次元で確かめられる（命題2.1）。トレースを取ると交換関係は有限行列で成り立たない。ゆえに非有界、ゆえに定義域、ゆえにワイル形が要る（本稿で確認）。
5. ガラボンの反例の住所が特定できる（第6節）。交換関係だけを課しワイル関係を課していないので、表の一行目に住んでいる。ワイル関係を課せばシュレーディンガー表現に強制され、パウリの議論が走る。矛盾ではなく、定理が及んでいない場所である。
6. 論文54 が開けたままにした一行を埋めた。54 は「ワイル関係が要る」で止めた。ワイル関係が与えるものは、一意性である。
7. 存在と一意性は別の配達物である（第7節）。論文126 のフロベニウスは存在のみを、本稿のストーン＝フォン・ノイマンは一意性を与える。一意性のほうが条件が多い——高くつく。

結語：「正準交換関係」という一語は、三つの違う状況を覆っている。そのうち一意性が成り立つのは一つだけであり、しかもその一つは両側から柵で囲まれている。一意性定理があると聞いたら、まず柵を数えること。柵の外に立っている構成は、定理への反例ではない——定理が届いていないだけである。

参考文献

1. Weyl, H. (1927). *Quantenmechanik und Gruppentheorie*. Zeitschrift für Physik, 46.
2. Stone, M. H. (1930). *Linear transformations in Hilbert space III: operational methods and group theory*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 16.
3. von Neumann, J. (1931). *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren*. Mathematische Annalen, 104.
4. Pauli, W. (1933). *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*. Handbuch der Physik, 24.
5. Nelson, E. (1959). *Analytic vectors*. Annals of Mathematics, 70.
6. Haag, R. (1955). *On quantum field theories*. Matematisk-fysiske Meddelelser, 29.
7. Gårding, L. & Wightman, A. S. (1954). *Representations of the commutation relations*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 40.
8. Galapon, E. A. (2002). *Pauli's theorem and quantum canonical pairs*. Proceedings of the Royal Society A, 458.
9. Reed, M. & Simon, B. (1972). *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press.
10. 山岸勇輝 (2026). 等号には六つの根がある [論文16], 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
11. 山岸勇輝 (2026). 別根であるだけでは半分である [論文17], 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
12. 山岸勇輝 (2026). ボルン則の幾何学的導出 [論文53], 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603193
13. 山岸勇輝 (2026). 山岸・時間演算子とクロック部分系理論 [論文54], 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603325
14. 山岸勇輝 (2026). 量子ビットとホップ写像 [論文68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238
15. 山岸勇輝 (2026). ボルンとグリーンソン [論文71]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650577
16. 山岸勇輝 (2026). 必然性の四つの根 [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
17. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
18. 山岸勇輝 (2026). クリフォード代数 [論文104]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836876
19. 山岸勇輝 (2026). 極限としてのモジュール [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
20. 山岸勇輝 (2026). 集約の三つの別根 [論文124]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22057728

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)