

$4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである

— ポアンカレ=ホップは片側しか与えない：毛玉の定理・オイラー標数・立体角の別根点呼（山岸・論文67の住所の書き直し） — [論文128]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文67 は $4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2)$ を示し、体系の 4π に位相的な錨を与えた。本稿はその錨の住所を確かめる。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、ポアンカレ=ホップが与えるのは片側だけである。指数の総和がオイラー標数に等しいという等式から出るのは、 $\chi \neq 0$ ならば消えないベクトル場は存在しないという必要性のみである。逆—— $\chi = 0$ ならば消えない場が存在する——は別の主張であり、連結かつ閉という仮定を要する。論文126 は存在を、論文127 は一意性を扱った。本稿が扱うのは必要と十分である（第2節）。第二に、指数の総和は零点の個数ではない。北極からの立体射影で平面の定ベクトル場を押し出すと、 S^2 上の零点はただ一つで、その指数が **2** である（本稿で三つの半径の円上の巻き数として確認）。「球面には必ずつむじが二つできる」は誤りである。定理が縛るのは総和であって個数ではない（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。 4π と $2\pi\chi$ を関数として比べると、一致するのは三次元の一点だけである。論文01 の 4π は体積要素 $4\pi r^2 dr$ の 4π 、すなわち $\text{Vol}(S^2)$ である。周囲の次元 d を動かすと、一方は $\text{Vol}(S^{d-1}) = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ という上下する実数列、他方は $2\pi\chi(S^{d-1})$ という 4π と **0** を往復する二値列になる。 $d = 2$ から **12** まで照合すると一致は $d = 3$ のみである（本稿で確認）。別の関数である（第4節）。第四に、分ける実例が二つある。トールラス：全立体角 4π は多様体に依らない（三次元における方向の空間の体積である）が、 $2\pi\chi(T^2) = 0$ である。半径： $\int K dA$ は半径に依らないが、面積 $4\pi R^2$ が 4π になるのは $R = 1$ のときだけである——鎖の一つ目の等号は、単位半径という規約を要する（第5節）。第五に、住所を書き直す。論文01 の 4π の住所は $\text{Vol}(S^2)$ 、すなわち論文115 の偶の階段である。 $2\pi\chi(S^2)$ は同じ数に達する別の道であって起源ではない。ゆえに「値は位相によって強制される」とまでは言えない——強制しているのは周囲の次元が三であることである。論文67 自身が本文で「算術的な一致以上のことは主張しない」と書いている。本稿はその一行を要旨まで通す（第7節）。第六に、 χ への四つの道は、別の許可証を要求する。三角形分割・ベクトル場・曲率積分・楕円型作用素——同じ数に達しながら、要る構造がそれぞれ違う。ポアンカレ=ホップは計量を要求しないが、ガウス=ボネは要求する（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。ポアンカレ＝ホップの定理、その逆、ガウス＝ボネ、チャーソン＝ガウス＝ボネ、 $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、片側性を明示したこと、総和と個数を分けたこと、二つの 4π を関数として比べて一致点を一つに絞ったこと、そして論文67の住所を書き直したことだけである。 4π に新しい意味を読み込まない（論文101・94）。

1. 記法と位置づけ

論文67 が置いたもの： $4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 2\pi \times 2$ 。ここで $\chi(S^2) = 2$ はポアンカレ＝ホップの定理によって計量に依らず固定される。

論文115 が置いたもの： $4\pi = \text{Vol}(S^2)$ は球面体積の偶の階段の一段であり、その隣は $\frac{8\pi^2}{3}$ である。

同じ 4π に、二つの住所が与えられている。論文17 は別根と言うのは半分であり、各根の住所を書いて初めて検査可能になると述べた。本稿はその検査を行う。

位置づけ：既存の定理を並べ、その射程を書く。新しい定理は主張しない。

2. ポアンカレ＝ホップが与えるのは、片側だけである

確立された事実 2.1（ポアンカレ＝ホップの定理）： M を滑らかな閉多様体、 X を孤立零点のみを持つ接ベクトル場とすると

$$\sum_{x: X(x)=0} \text{ind}_x(X) = \chi(M). \quad (1)$$

観察 2.2（等式から出るのは片側である）

(1) の左辺は、場がどこかで消えていることを前提に書かれている。したがって (1) から直ちに従うのは

$\chi(M) \neq 0$ ならば、消えないベクトル場は存在しない

という必要性だけである。 S^2 では $\chi = 2 \neq 0$ ゆえ毛玉は梳かせない。

観察 2.3 (逆は別の主張である)

しばしば「 $\chi = 0$ ならば梳かせる」と併せて語られるが、これは (1) の帰結ではない。(1) は、零点が無い場合に総和が空和として 0 になることと $\chi = 0$ が両立すると言うだけであり、そのような場が作れるとは言っていない。

確立された事実 2.4 (逆・ホップ) : 連結な滑らかな閉多様体 M が消えない接ベクトル場を持つための必要十分条件は $\chi(M) = 0$ である。十分性の側は構成を要する別の定理であり、連結性を仮定に含む。

観察 2.5 (三つ目の対)

論文126 は存在定理が存在しか与えないことを述べ、論文127 は一意性定理が柵の内側にしかないことを述べた。本稿が扱うのは必要と十分である。片方向の定理を双方向に読むのは、値段を払わずに商品を持ち帰ることである。

3. 指数の総和は、零点の個数ではない

観察 3.1 (よくある言い換えの誤り)

$\chi(S^2) = 2$ から「球面には必ずつむじが二つできる」と言われることがある。これは誤りである。(1) が縛るのは指数の総和であって零点の個数ではない。

構成 3.2 (零点ひとつ、指数 2) : 北極 N からの立体射影で $S^2 \setminus \{N\}$ を平面と同一視し、平面上の定ベクトル場を S^2 へ押し出す。定ベクトル場は平面上で消えないから、 S^2 上の零点は N ただ一つである。南極からの座標 w に移すと、押し出された場は定数倍を除いて

$$V(w) = w^2$$

となる。原点を囲む円上での偏角の巻き数が指数であり、本稿では半径 0.1、0.5、1.0 の円上で数値的に 2.000000 を得た。したがって

$$\sum \text{ind} = 2 = \chi(S^2)$$

が零点ひとつで満たされる。(証明終)

観察 3.3 (何が数えられているか)

2 はつむじの本数ではなく回転の回数である。一つの語 (「2」) が、二つの別の量の名として使われている。指数は符号を持つ——指数 +3 と -1 の零点を二つ持つ場合も (1) を満たす。総和が縛られているだけで、内訳は自由である。

4. 4π と $2\pi\chi$ を、関数として比べる

観察 4.1 (論文01 の 4π はどこから来たか)

論文01 は $\rho(r) = r^{-2}$ の単位球内の質量を

$$m = \int_0^1 4\pi r^2 \cdot r^{-2} dr = 4\pi$$

と計算した。この 4π は体積要素 $4\pi r^2 dr$ の 4π であり、 $\text{Vol}(S^2)$ である。すなわち三次元における方向の空間の体積である。

観察 4.2 (比べ方)

二つの数が一致したとき、同じ根かどうかは、両方を関数として書いて動かせば分かる (論文124 の道具)。動かす変数は周囲の次元 d である。

$$\text{Vol}(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad 2\pi\chi(S^{d-1}) = 2\pi(1 + (-1)^{d-1}).$$

確立された事実 4.3 (照合表) : 本稿で $d = 2$ から 12 まで記号計算により照合した。

d	$\text{Vol}(S^{d-1})$	$2\pi\chi(S^{d-1})$	一致
2	2π	0	—
3	4π	4π	一致
4	$2\pi^2$	0	—
5	$\frac{8\pi^2}{3}$	4π	—
6	π^3	0	—
7	$\frac{16\pi^3}{15}$	4π	—
8	$\frac{\pi^4}{3}$	0	—
9	$\frac{32\pi^4}{105}$	4π	—

$d = 10, 11, 12$ でも一致しない。一致するのは $d = 3$ のただ一点である。

観察 4.4（一点で交わる二つの関数は、同じ関数ではない）

左の列は上がって下がる実数列であり（ $d = 7$ で最大、以後 0 へ向かう）、右の列は 4π と 0 を往復する二値列である。片方は Γ が支配し、片方はパリティが支配している。論文115 は前者が二本の階段に分かれることと、その分離の根が Γ にあることを示した。後者はその階段に乗っていない。

そして一点で交わることは、根が同じであることの証拠にはならない。論文100 は共鳴は署名であって証明ではないと述べた。一点の一致は、共鳴の中でも最も弱いものである。

5. 分ける実例——トーラスと半径

観察 5.1（トーラスが分ける）

全立体角 4π はどの多様体を見ているかに依らない。それは三次元における方向の空間 S^2 の体積であって、 M の量ではないからである。一方 $2\pi\chi(M)$ は M の量である。

M	全立体角（方向の空間）	$2\pi\chi(M)$
S^2	4π	4π
T^2	4π	0
種数 2 の閉曲面	4π	-4π

S^2 で一致するのは、そこで多様体が方向の球面そのものだからである。

観察 5.2（半径が分ける）

半径 R の丸い球面では、面積は $4\pi R^2$ 、ガウス曲率は R^{-2} であり、

$$\int K dA = 4\pi R^2 \cdot R^{-2} = 4\pi$$

は R に依らない（本稿で確認）。だが「 4π が面積である」が成り立つのは $R = 1$ のときだけである。

したがって $4\pi = \int K dA = 2\pi\chi(S^2)$ という鎖の、一つ目の等号と二つ目の等号は身分が違う。二つ目は位相である。一つ目は単位半径という規約を挟んでいる。論文67 はこれを本文で正しく述べている——「計量に依らない不変量は曲率積分であり、丸い単位球面はそれを面積 4π として実現する」。本稿はそれを住所として書き下すだけである。

6. χ への四つの道は、別の許可証を要求する

観察 6.1（同じ数、別の構造）

χ への道	要る構造	要らないもの
$V - E + F$	三角形分割	滑らかさ・計量
ポアンカレ＝ホップ	滑らかな構造とベクトル場	計量
ガウス＝ボネ	計量	ベクトル場
指数定理（論文70）	楕円型作用素	—

観察 6.2 （内容は独立性そのものである）

χ がどの選択にも依らないという事実が、これらの定理の中身である。三角形分割の取り方に依らず、ベクトル場の取り方に依らず、計量の取り方に依らない。同じ数に達することが驚きなのではなく、達し方が自由であることが驚きである。

観察 6.3 （体系にとっての帰結）

ポアンカレ＝ホップは計量を要求しない。したがってそこから $\int K dA$ の値は出てこない。 4π という数が現れるのはガウス＝ボネの側であり、そちらは計量を要求する。「 4π が位相的である」と言うときの位相は、 $\chi = 2$ という整数までであって、 4π という実数までではない。

7. 住所を書き直す

観察 7.1 （何が正しく、何が言い過ぎか）

論文67 の主張は二つに分かれる。

主張	身分
$4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ （丸い単位球面上で）	恒等式（保つ）
$\chi(S^2) = 2$ は計量に依らない	事実（保つ）
論文01 の 4π の値が位相によって強制される	住所が違う

観察 7.2 （強制しているのは何か）

論文01 の 4π を強制しているのは周囲の次元が三であることである。 d を動かせば $2\pi, 4\pi, 2\pi^2, \frac{8\pi^2}{3}, \dots$ と動く。 $2\pi\chi$ の側は $0, 4\pi, 0, 4\pi, \dots$ としか動かない。動き方が違う以上、一方が他方を強制してはいない。

観察 7.3（論文67 は本文で既にブレーキを踏んでいる）

論文67 は「ここで算術的な一致以上のことは主張しない：論文48と同様、異なる規格化定数を安易に同一視してはならない」と書いている。そのブレーキは正しい。本稿が加えるのは、そのブレーキを要旨まで通し、住所を数で書いたことである。

観察 7.4（高次元の錨について）

論文67 は高次元の錨をチャーソン＝ガウス＝ボネの $(4\pi)^n n!$ に接続した。論文48 第3版は、その切り方を $(2\pi)^n \times (2^n n!)$ に置き直している—— $2^n n!$ はパフィアンの反対称化因子という一つの塊であり、そこから 2^n を引き剥がして $(4\pi)^n$ を作ることはできない。数値は変わらない。変わるのは、どこに切れ目があるかである。

観察 7.5（それでも残るもの）

$\chi(S^2) = 2$ が位相的に固定されるという事実はそのまま残る。残らないのは 4π という実数がそこから出てくるという読みである。整数は位相が決め、実数は計量と次元が決める。

8. 結論

1. ポアンカレ＝ホップが与えるのは片側だけである（観察2.2）。等式から出るのは必要性のみであり、逆は連結性を仮定する別の定理である（事実2.4）。論文126（存在）・論文127（一意性）に続く三つ目の対である。
2. 指数の総和は零点の個数ではない（構成3.2）。 S^2 上に零点ひとつ・指数 2 の場が作れる（巻き数を三つの半径で確認）。「つむじが二つ」は誤りである。
3. 4π と $2\pi\chi$ は、関数として一点でしか交わらない（事実4.3）。 $d = 2$ から 12 まで照合して一致は $d = 3$ のみ。片方は Γ が支配する実数列、片方はパリティが支配する二値列である。
4. 分ける実例が二つある（第5節）。トーラスでは全立体角 4π と $2\pi\chi = 0$ が分かれる。半径では $\int K dA$ が不変で面積が動く——鎖の一つ目の等号は単位半径という規約を挟んでいる。
5. χ への四つの道は別の許可証を要求する（観察6.1）。ポアンカレ＝ホップは計量を要求しない。ゆえにそこから実数 4π は出てこない。
6. 住所を書き直す（第7節）。論文01 の 4π の住所は $\text{Vol}(S^2)$ 、論文115 の偶の階段である。 $2\pi\chi(S^2)$ は同じ数に達する別の道である。論文67 が本文で踏んだブレーキを、要旨まで通した。

7. 高次元の錨の切り方は、論文48 第3版が $(2\pi)^n \times (2^n n!)$ に置き直している（観察7.4）。数値は変わらない。

結び：整数は位相が決め、実数は計量と次元が決める。 $\chi(S^2) = 2$ は位相である。 4π は三次元における方向の空間の体積である。両者が同じ数に達するのは、三次元という一点においてだけである。一点で交わる二つの関数を、同じ関数と呼んではならない。

参考文献

1. Poincaré, H. (1885). *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 4e série, 1.
2. Hopf, H. (1926). *Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Mathematische Annalen, 96.
3. Chern, S.-S. (1944). *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*. Annals of Mathematics, 45.
4. Milnor, J. (1965). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia.
5. Guillemin, V. & Pollack, A. (1974). *Differential Topology*. Prentice-Hall.
6. Bott, R. & Milnor, J. (1958). *On the parallelizability of the spheres*. Bulletin of the American Mathematical Society, 64.
7. Adams, J. F. (1962). *Vector fields on spheres*. Annals of Mathematics, 75.
8. Atiyah, M. F. & Singer, I. M. (1963). *The index of elliptic operators on compact manifolds*. Bulletin of the American Mathematical Society, 69.
9. 山岸勇輝 (2026). 山岸唯一性定理 ($n = 2$) [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
10. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
11. 山岸勇輝 (2026). 面積は立体角ではない [論文45] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602337
12. 山岸勇輝 (2026). 幾何なのは Ω_3 だけである [論文46]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602422
13. 山岸勇輝 (2026). パフィアンの $2^n n!$ は一つの塊である [論文48] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
14. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチのオイラー標数的起源 [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
15. 山岸勇輝 (2026). 指数定理の住所 [論文70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
16. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
17. 山岸勇輝 (2026). 次元の持ち上げ [論文109]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837375
18. 山岸勇輝 (2026). 四次元にいると知っているのは誰か [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
19. 山岸勇輝 (2026). 二本の階段 [論文115]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21967686
20. 山岸勇輝 (2026). 集約の三つの別根 [論文124]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22057728
21. 山岸勇輝 (2026). 積分因子の存在は、温度を与えない [論文126]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079437
22. 山岸勇輝 (2026). 同じ「正準交換関係」が、三つの別の状況を指している [論文127]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079508

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)