

$\hbar$ は、不等式の数学の側には無い

— 不確定性は一つの定理ではない：分散・減衰・台・エントロピー・素数の別根点呼（山岸・不確定性の住所） — [論文129]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「不確定性原理」という一語が、測っているものの違う複数の定理を指している。本稿はそれを点呼し、それぞれの住所を書く。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、これが本稿の芯である。 $\hbar$ は不等式の数学の側には無い。時間幅と角周波数幅の積についての不等式 $\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$ は、二乗可積分な関数とそのフーリエ変換についての定理であり、物理定数を一つも含まない。本稿ではガウス関数がこれを等号で満たすこと、しかも幅によらず $\frac{1}{2}$ になることを記号計算で確認した。 $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ になるのは、 $p = \hbar k$ という物理の同定を一度だけ通したからである。 $\frac{1}{2}$ は数学が出し、 $\hbar$ は物理が出す（第2節）。第二に、その $\frac{1}{2}$ すら規約を含んでいる。周波数を「一周あたり」で書けば同じ定理が $\sigma_t \sigma_\nu \geq \frac{1}{4\pi}$ になる。ここに現れる 4π は $2 \times 2\pi$ であり、 2 は極値の $\frac{1}{2}$ 、 2π は一周とラジアンの変換である。そして $\frac{\hbar}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$ の 4π も同じ $2 \times 2\pi$ である。別根ではない。同じ根である。どちらも立体角ではない——下限は空間次元を変えても動かないからである（第3節）。第三に、分散版は、分散が発散すれば何も言っていない。コーシー分布の二次モーメントは発散する（本稿で確認）。矩形パルスは時間側の台が有限なのに、周波数側の分散が発散する（本稿で窓を四倍ずつ広げ、推定値が四倍ずつ増えることを確認）。「両方は絞れない」は、分散という物差しについての言明であって、局在そのものについての言明ではない。これは論文106 が定常性と裾の厚さについて置いたブレーキと同じ形である（第4節）。第四に、離散側には算術の根がある。 $\mathbb{Z}/N$ 上では非零成分の個数の積が N 以上になる（ドノホ＝スターク）。これに加法版 $\|f\|_0 + \|\hat{f}\|_0 \geq N+1$ が成り立つのは N が素数のときだけである（タオ）。本稿では $N = 9, 12, 16$ の楕円が積 $= N$ を達成し、和が $N+1$ を大きく下回ることを示し、 $N = 7, 11, 13$ では無作為試行の最小値がちょうど $N+1$ になることを確認した。改良を与えているのは解析ではなく、 N の素数性である（第5節）。第五に、八つ並べると、測っているものが全部違う。分散・交換子・減衰の速さ・台の測度・エントロピー・非零成分の個数・素数性・寿命。どれも他を含意しない。とくにエネルギーと時間の関係は、位置と運動量の関係と同じ定理ではない——時間は作用素ではないからである（論文54・127）（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。ケナード（1927）、ワイル（1928）、ロバートソン（1929）、ハーディ（1933）、ハーシュマン（1957）とベックナー（1975）、アムラン＝ベルティエ（1977）とベネディクス（1985）、ドノホ＝スターク（1989）、タオ（2005）、マンデルシュタム＝タム（1945）はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、数学の $\frac{1}{2}$ と物理の $\hbar$ を分けたこと、二つの 4π を同じ根と判定したこと、分散版が空虚になる二つの証人を挙げたこと、素数性を根として点呼に入れたことだけである。 4π に幾何を読み込まない（論文46・94）。

1. 記法と位置づけ

フーリエ変換を $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\omega t} dt$ とし、 $\|f\|_2 = 1$ の下で

$$\sigma_t^2 = \int t^2 |f(t)|^2 dt, \quad \sigma_\omega^2 = \int \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

と書く。 $\|f\|_0$ は非零成分の個数を表す。

位置づけ：既存の定理を並べ、その射程を書く。新しい定理は主張しない。論文17 は別根と言うのは半分であり、住所を書いて初めて検査可能になると述べた。本稿は「不確定性原理」という一語について、それを行う。

2. $\hbar$ は、不等式の数学の側には無い

確立された事実 2.1（フーリエの不確定性不等式）： $f \in L^2(\mathbb{R})$ 、 $\|f\|_2 = 1$ に対し

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}, \quad (2)$$

等号成立はガウス関数のときに限る。証明はコーシー＝シュワルツの不等式と部分積分による。

観察 2.2（この文に物理定数は一つも無い）

(2) は二乗可積分な関数とそのフーリエ変換についての言明である。 $\hbar$ も c も G も現れない。量子力学が現れる前に、この不等式は成り立っている。

検算 2.3（ガウス関数で等号、しかも幅によらない）： $f(t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-at^2}$ について、本稿では記号計算により

$$\|f\|_2^2 = 1, \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{4a}, \quad \sigma_\omega^2 = a, \quad \sigma_t \sigma_\omega = \frac{1}{2}$$

を得た。 a が消える。すなわち $\frac{1}{2}$ は幅の選び方にも依らない極値である。（証明終）

観察 2.4 (では $\hbar$ はどこから来るのか)

物理は一つの同定を持ち込む——ド・ブロイとプランクの関係 $p = \hbar k$ である。位置を t の役、波数を ω の役に置き、 $p = \hbar k$ を代入すれば

$$\sigma_x \sigma_p = \hbar \sigma_x \sigma_k \geq \frac{\hbar}{2}$$

となる。 $\frac{1}{2}$ は数学が出し、 $\hbar$ は物理が出す。「量子」であるのは、この一度の代入だけである。

観察 2.5 (等号の身分)

(2) は恒等式ではなく不等式であり、その $\frac{1}{2}$ は極値問題の値である。論文16 は等号が六つの根を持つと述べた。ここでの $\geq$ は「経験則」ではなく「定理の帰結」であり、 $\frac{1}{2}$ は「規約」ではなく「極値」である。

3. 二つの 4π は、同じ根である

観察 3.1 (周波数の書き方を変える)

角周波数 ω ではなく「一周あたり」の周波数 $\nu = \omega/2\pi$ で書けば、(2) はそのまま

$$\sigma_t \sigma_\nu \geq \frac{1}{4\pi}$$

になる (本稿で確認)。定理は一つ、書き方が二つである。

観察 3.2 (二つの 4π の内訳)

どこの 4π か	2 の出所	2π の出所
$\sigma_t \sigma_\nu \geq \frac{1}{4\pi}$	極値の $\frac{1}{2}$	一周とラジアンの変換
$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{4\pi}$	極値の $\frac{1}{2}$	$\hbar$ と $\hbar$ の変換

そして $\hbar = h/2\pi$ の 2π と、 $\omega = 2\pi\nu$ の 2π は同じものである——どちらも一周あたりとラジアンあたりの換算である。ゆえに二つの 4π は別根ではない。同じ根である。

観察 3.3（どちらも立体角ではない）

反例は次元非依存性である。 $\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ は空間次元を変えても各成分について同じ形で成り立つ。一次元の直線上の粒子にも同じ下限がかかるが、そこに球面は無い。立体角であれば下限は次元とともに動くはずである。動かない。

これは論文46 が置いた形と同じである——フーリエ変換の規約を変えれば 4π は 4 にも $1/\pi^2$ にもなる。規約が動かせる数に、幾何を読み込んではいならない。

4. 分散が発散すれば、分散版は何も言っていない

観察 4.1（不等式が空虚になる場合がある）

(2) は σ_t と σ_ω がどちらも有限であることを前提に意味を持つ。片方が発散すれば、左辺は数ではなくなる。

検算 4.2（証人その一・コーシー分布）： $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ は確率密度である（本稿で積分 = 1 を確認）が、二次モーメントは発散する（本稿で ∞ を確認）。裾が厚い分布に対して、分散版の不等式は何も述べていない。

検算 4.3（証人その二・矩形パルス）：時間側の台が $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ の矩形パルスのフーリエ変換は **sinc** であり、 $|\hat{f}|^2$ は ω^{-2} でしか減衰しないから $\int \omega^2 |\hat{f}|^2 d\omega$ は発散する。本稿では窓幅を四倍ずつ広げ、推定値が

$$1137 \rightarrow 4541 \rightarrow 18172$$

とほぼ四倍ずつ増えることを確認した。台は有限、分散は無限である。

観察 4.4（何が言えて、何が言えないか）

「時間にも周波数にも同時に局在することはできない」という文は、そのままでは定理ではない。定理になるのはどの物差しで「局在」を測るかを決めてからである。分散で測るならケナード、台の測度で測るならベネディクス、減衰の速さで測るならハーディ——別の定理である。

これは論文106と同じ形である——ウィーナー・フィルタは定常性を前提とし、裾の厚い過程では前提が落ちる。分散を使う道具は、分散が有る世界でしか使えない。

5. 離散側には、算術の根がある

確立された事実 5.1（ドノホ＝スターク 1989）： $\mathbb{Z}/N$ 上の $f \neq 0$ に対し

$$\|f\|_0 \cdot \|\hat{f}\|_0 \geq N.$$

確立された事実 5.2（タオ 2005）： N が素数のとき、さらに

$$\|f\|_0 + \|\hat{f}\|_0 \geq N + 1.$$

検算 5.3（合成数では加法版は成り立たない）：本稿では等間隔の楕形（ピケットフェンス）を作り、次を得た。

N	$\ f\ _0$	$\ \hat{f}\ _0$	積	和	$N + 1$
9	3	3	9	6	10
12	4	3	12	7	13
16	4	4	16	8	17

積はちょうど N を達成し、和は $N + 1$ を大きく下回る。すなわち合成数では加法版は偽である。

検算 5.4（素数では成り立つ）： $N = 7, 11, 13$ について、台の大きさを無作為に選んだ 4000 通りの試行で、 $\|f\|_0 + \|\hat{f}\|_0$ の最小値はそれぞれ 8、12、14、すなわちちょうど $N + 1$ であった。（証明終）

観察 5.5（根の型が違う）

改良を与えているのは解析ではない。楕形が作れるのは N が真の約数を持つからであり、素数はそれを禁じる。解析の定理の中に、算術の条件が入っている。論文86は必然の根を四つ（位相・対称性・代数・次元）挙げた。ここに現れているのはそのどれでもない——整数の分解可能性である。

6. 八つ並べると、測っているものが全部違う

観察 6.1（点呼）

名	何で「集中」を測るか	住所
ケナード・ワイル	分散	フーリエ解析（量子以前）
ロバートソン	交換子の期待値	作用素代数
ハーディ	減衰の速さ	複素解析
アムラン＝ベルティエ・ベネディクス	台の測度	測度論
ハーシュマン＝ベックナー	エントロピー	情報理論
ドノホ＝スターク	非零成分の個数	離散フーリエ
タオ	同上・ N が素数	算術
マンデルシュタム＝タム	寿命	時間は作用素でない

観察 6.2（どれも他を含意しない）

分散が無限でも台は有限でありうる（矩形パルス）。台が無限でも分散は有限でありうる（ガウス関数）。二つの物差しは、互いに反例を持ち合っている。

検算 6.3（エントロピー版は別の極値を持つ）：本稿では幅 $s = 0.3, 1.0, 3.0$ のガウス関数について $h(|f|^2) + h(|\hat{f}|^2)$ を数値計算し、いずれも 0.306853 、すなわち $\log \frac{e}{2}$ を得た。別の汎関数、別の極値——別の定理である。

観察 6.4 (エネルギーと時間は、同じ定理ではない)

$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ は、位置と運動量の関係と同じ形の定理ではない。ロバートソンの不等式は二つの自己共役作用素についての言明であり、時間はそのような作用素ではない (論文54・127)。マンデルシュタム＝タムの関係が与えるのは、ある観測量が変化するのに要する時間の尺度であって、時間の分散ではない。同じ記号 Δt が、別の量の名として使われている (論文118 の論理型の議論と同型)。

7. ではフーリエは、何を言っていたのか

観察 7.1 (線形の波についての言明である)

(2) は波であれば従う。音でも、水面の波でも、株価の時系列でも同じである。短いパルスは広い帯域を占める——これは工学が毎日使っている事実であり、量子力学とは関係がない。

観察 7.2 (量子力学が加えたもの)

加わったのは二つである。(i) 粒子が波として記述されること、(ii) $p = \hbar k$ という同定。不確定性の「原理」らしさは、この二つが持ち込んだものであって、不等式そのものが持ち込んだものではない。

観察 7.3 (それでも残る驚き)

残るのは $\hbar$ が有限であることである。 $\hbar \rightarrow 0$ を想像すれば下限は消える。下限があるのは数学のせいだが、下限が「効く」のは $\hbar$ が有限だからである。数学は形を与え、物理は目盛りを与える。

8. 結論

1. $\hbar$ は不等式の数学の側には無い (観察2.2)。 $\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$ は物理定数を含まない。ガウス関数が幅によらず等号を与える (検算2.3)。 $\frac{1}{2}$ は数学、 $\hbar$ は物理。
2. 二つの 4π は同じ根である (観察3.2)。 $\sigma_t \sigma_\nu \geq \frac{1}{4\pi}$ の 4π も $\frac{\hbar}{4\pi}$ の 4π も $2 \times 2\pi$ であり、 2π はどちらも一周とラジアンの変換である。どちらも立体角ではない——次元非依存性が反例 (観察3.3)。
3. 分散が発散すれば、分散版は空虚である (第4節)。証人はコーシー分布 (二次モーメント $= \infty$) と矩形パルス (台は有限、分散は無限・窓を四倍ずつ広げて確認)。「局在できない」は物差しを決めて初めて定理になる。

4. 離散側には算術の根がある（第5節）。 N が合成数なら楕形が積 $= N$ を達成し和は $N + 1$ を大きく下回る（ $N = 9, 12, 16$ ）。 N が素数なら最小の和はちょうど $N + 1$ （ $N = 7, 11, 13$ 、各 4000 試行）。効いているのは整数の分解可能性である。
5. 八つは互いに他を含意しない（観察6.1）。二つの物差しは互いに反例を持ち合っている（観察6.2）。エントロピー版は別の極値 $\log \frac{e}{2}$ を持つ（検算6.3）。
6. エネルギーと時間は、同じ定理ではない（観察6.4）。時間は自己共役作用素ではない（論文54・127）。同じ記号 Δt が別の量を指している（論文118）。

結び：数学は形を与え、物理は目盛りを与える。 $\frac{1}{2}$ はフーリエ変換の極値であり、 $\hbar$ は一度の代入で入ってくる。「不確定性原理」と呼ばれているものは一つの定理ではなく、測るものを変えるたびに別の定理になる家族である。どの物差しで測っているかを言わないうちは、まだ何も述べていない。

参考文献

1. Kennard, E. H. (1927). *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen*. Zeitschrift für Physik, 44.
2. Weyl, H. (1928). *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Hirzel.
3. Robertson, H. P. (1929). *The uncertainty principle*. Physical Review, 34.
4. Hardy, G. H. (1933). *A theorem concerning Fourier transforms*. Journal of the London Mathematical Society, 8.
5. Mandelshtam, L. & Tamm, I. (1945). *The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics*. Journal of Physics (USSR), 9.
6. Hirschman, I. I. (1957). *A note on entropy*. American Journal of Mathematics, 79.
7. Beckner, W. (1975). *Inequalities in Fourier analysis*. Annals of Mathematics, 102.
8. Amrein, W. O. & Berthier, A. M. (1977). *On support properties of L^p -functions and their Fourier transforms*. Journal of Functional Analysis, 24.
9. Benedicks, M. (1985). *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 106.
10. Donoho, D. L. & Stark, P. B. (1989). *Uncertainty principles and signal recovery*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 49.
11. Tao, T. (2005). *An uncertainty principle for cyclic groups of prime order*. Mathematical Research Letters, 12.
12. Folland, G. B. & Sitaram, A. (1997). *The uncertainty principle: a mathematical survey*. Journal of Fourier Analysis and Applications, 3.
13. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
14. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
15. 山岸勇輝 (2026). 幾何なのは Ω_3 だけである [論文46]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602422
16. 山岸勇輝 (2026). 山岸・時間作用素と時計部分系の理論 [論文54] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603325

17. 山岸勇輝 (2026). 必然の根 [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
18. 山岸勇輝 (2026). フラクタル次元 [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
19. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
20. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
21. 山岸勇輝 (2026). 形を聴く [論文102]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836735
22. 山岸勇輝 (2026). ウィーナー・フィルタ [論文106]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836984
23. 山岸勇輝 (2026). 尺度不変性は四つの根を持つ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
24. 山岸勇輝 (2026). 二つの時計、一つの尺度 [論文118]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22036237
25. 山岸勇輝 (2026). 集約の三つの別根 [論文124]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22057728
26. 山岸勇輝 (2026). 同じ「正準交換関係」が、三つの別の状況を指している [論文127]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079508
27. 山岸勇輝 (2026). $4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである [論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)