

渦線が終われないのは、法則ではなく恒等式である

— ヘルムホルツの三定理は同じ値段ではない： $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の別根、そして 4π はどこにあるか（山岸・渦の点呼） — [論文130]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「ヘルムホルツの渦定理」という一語が、値段の違う三つの言明を指している。本稿はそれを点呼し、それぞれが何を要求するかを書く。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、第一定理は恒等式であって、法則ではない。「渦線は流体の中で終われない」は $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ から従い、そして $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$ である以上、これは任意の滑らかなベクトル場について成り立つ恒等式である（本稿で記号計算により確認）。オイラー方程式も、非圧縮性も、順圧性も使っていない。値段はゼロである（第2節）。第二に、これが本稿の芯の一つ。 $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は別根である。式の形は同じだが、渦度は定義により回転であり、磁場はそうではない。マクスウェルにおいて $\mathbf{B}$ は基本場であり、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は法則——それがあるからこそ $\mathbf{B}$ をベクトルポテンシャルの回転として書ける。磁気単極子を認めれば右辺はゼロでなくなり、 $\mathbf{B}$ は大域的には回転でなくなる。渦度にはその選択肢が無い。分けるのは、どちらの場が基本量かである（第3節）。第三に、ケルヴィンの循環定理は三つの仮定を担いでいる——非粘性・順圧・保存力。三つとも反例がある。粘性があればラム＝オセーン渦の循環は減衰する（本稿で $\nu > 0$ のとき時間微分が負であることを確認）。順圧でなければ傾圧トルクが渦度を生む（本稿で $\rho = 1 + x$, $p = 1 + y$ について $\nabla \rho \times \nabla p \neq 0$ を明示）。第一定理と第三定理は、同じ人の名を冠しながら、値段が違う（第4節）。第四に、これが本稿の芯のもう一つ。 4π は定理の側には無い。ヘルムホルツの三定理のどこにも 4π は現れない。現れるのはビオ＝サヴァールの式、すなわち渦度から速度を復元する式である。そしてその 4π はラプラシアングリーン関数の定数であり、次元とともに動く（本稿で $d = 3$ から 8 まで表にした）。ゆえにそれは $\text{Vol}(S^{d-1})$ 、すなわち立体角であり、ポアソン方程式の 4π と同じものである（論文35・128）。 4π は定理ではなく逆問題に住んでいる（第5節）。第五に、同じ $\boldsymbol{\omega}$ について、次元を選ぶ事実と選ばない事実が同居している。渦度伸長項は2次元で恒等的に消える（本稿で確認）——論文03 が記録したとおり、これは次元を選ぶ側である。ところが $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ はどの次元でも成り立つ。一つの場について、二つの事実が別の資格を持っている（論文114）（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。ヘルムホルツ（1858）、ケルヴィン（1869）、ビオ＝サヴァール、傾圧トルク、ラム＝オセーン渦はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、三定理を恒等式と条件つき法則に仕分けたこと、 $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を別根と判定し分離子を書いたこと、 4π の住所を逆問題の側に置いたこと、同じ場が二つの資格の事実を持つことを示したことだけである。 4π に新しい意味を読み込まない（論文46・101）。

1. 記法と位置づけ

速度場を $\mathbf{u}$ 、渦度を $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ 、閉曲線 C まわりの循環を $\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ と書く。

ヘルムホルツの三定理（標準）：(I) 渦管の強さは管に沿って一定であり、ゆえに渦線は流体の中で終われない。(II) 渦線は流体とともに動く。(III) 渦管まわりの循環は時間的に一定である（ケルヴィンの循環定理）。

位置づけ：既存の定理を並べ、その値段を書く。新しい定理は主張しない。論文17 は別根と言うのは半分であり、住所を書いて初めて検査可能になると述べた。本稿は「渦定理」という一語について、それを行う。

2. 第一定理は恒等式である

確立された事実 2.1（回転の発散は消える）：任意の二回連続微分可能なベクトル場 $\mathbf{F}$ について

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \quad (1)$$

検算 2.2：本稿では、成分を任意の未知関数としたまま (1) が 0 になることを記号計算で確認し、さらに二つの具体的な場についても 0 を得た。方程式を一つも仮定していない。（証明終）

観察 2.3（ゆえに第一定理は何も要求しない）

渦度は定義により $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ である。したがって $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ は (1) の直接の帰結であり、

オイラー方程式も、非圧縮性も、順圧性も、非粘性も要らない

粘性流体でも、圧縮性流体でも、乱流でも成り立つ。「渦線は流体の中で終われない」は運動学であって力学ではない。

観察 2.4（等号の身分）

論文16 は等号が六つの根を持つと述べた。ここでの $=0$ は「経験則」でも「条件式」でもなく、恒等式である。値段がゼロだということは、内容もその分だけ少ないということである。

3. $\nabla \cdot \omega = 0$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は別根である

観察 3.1（形は同じである）

磁束密度についてのマクスウェルの一本 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は、(1) と見た目が同じである。どちらも「湧き出しが無い」と読める。磁力線も渦線も、途中で終われない。

観察 3.2（だが根が違う）

	ω	$\mathbf{B}$
基本量はどちらか	$\mathbf{u}$ (ω は導出量)	$\mathbf{B}$ 自身
$\nabla \cdot (\cdot) = 0$ の身分	恒等式	法則
右辺が非零になりうるか	ありえない	ありうる（磁気単極子）
ポテンシャルの存在	定義から自明	法則の帰結

観察 3.3（分離子）

分けるのは「その場が回転であることに失敗しうるか」である。 $\mathbf{B}$ については失敗しうる——磁気単極子を認める理論では $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \neq 0$ となり、 $\mathbf{B}$ は大域的にはベクトルポテンシャルの回転でなくなる（ディラック 1931）。 ω については原理的に失敗しえない——それは仮定できる場ではなく、 $\mathbf{u}$ の回転という定義そのものだからである。

観察 3.4 (体系の中の同型)

これは論文107 が第二定理について述べた形に近い——局所対称性は恒等式（ビアンキ恒等式）を強制し、恒等式は保存則と身分が違う。 $\nabla \cdot (\nabla \times) = 0$ は、その最も初等的な例である。そして恒等式は、検証すべき主張ではない。

4. ケルヴィンの定理は三つの仮定を担っている

確立された事実 4.1 (ケルヴィンの循環定理)：非粘性、順圧 ($\rho = \rho(p)$)、保存力の三条件のもとで、流体とともに動く閉曲線まわりの循環は時間的に一定である。

検算 4.2 (順圧を落とすと壊れる)：渦度方程式には傾圧項 $\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}$ が現れる。本稿では $\rho = 1 + x$ 、 $p = 1 + y$ について

$$\nabla \rho \times \nabla p = (0, 0, 1), \quad \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} = \left(0, 0, \frac{1}{(1+x)^2}\right)$$

を得た。等密度面と等圧面が交わるところで、渦度が生まれる。一方 $\rho = \rho(p)$ とすれば同じ外積は恒等的に消える (本稿で確認)。海風が立ち上がるのは、この項による。(証明終)

検算 4.3 (非粘性を落とすと壊れる)：ラム＝オセーン渦では、半径 a の固定円を通る循環が

$$\Gamma(a, t) = \Gamma_0 \left(1 - e^{-a^2/(4\nu t)}\right)$$

であり、本稿では

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\frac{\Gamma_0 a^2}{4\nu t^2} e^{-a^2/(4\nu t)} < 0 \quad (\nu > 0)$$

を得た。 $\nu \rightarrow 0^+$ でのみ $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$ となる (本稿で確認)。循環が保存されるのは、粘性がゼロのときだけである。(証明終)

観察 4.4 (値段表)

	何を要求するか	身分
第一定理（渦線は終われない）	何も要求しない	恒等式
第二定理（渦線は流体とともに動く）	非粘性・順圧・保存力	条件つき法則
第三定理（循環は一定）	非粘性・順圧・保存力	条件つき法則

同じ人の名を冠した三つが、二つの圏に分かれている。論文126 は存在定理は存在しか与えないと述べ、論文129 は数学が形を与え物理が目盛りを与えると述べた。ここでは、第一定理が数学、第二・第三定理が物理である。

5. 4π はどこにあるか

観察 5.1（定理の側には無い）

ヘルムホルツの三定理の言明のどこにも 4π は現れない。第一定理は恒等式であり、第二・第三定理は保存の言明である。どちらも数を含まない。

観察 5.2（現れるのは復元の式である）

ω から $\mathbf{u}$ を復元するとき、ビオ＝サヴァールの形

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

が現れる。これは磁気静力学の式と同じ形である（ここでは $\mu_0/4\pi$ ）。 4π はここにある。

検算 5.3（その 4π は立体角である）： 4π はラプラシアングリーン関数の定数である。本稿では $\mathbf{G} = -\frac{1}{4\pi\mathbf{r}}$ が原点の外で調和であり、勾配の球面流束が半径によらず $\mathbf{1}$ であることを確認した。さらに d 次元では定数が $(d-2)\text{Vol}(S^{d-1})$ になる。

d	$\text{Vol}(S^{d-1})$	$(d-2) \text{Vol}(S^{d-1})$
3	4π	4π
4	$2\pi^2$	$4\pi^2$
5	$\frac{8\pi^2}{3}$	$8\pi^2$
6	π^3	$4\pi^3$
7	$\frac{16\pi^3}{15}$	$\frac{16\pi^3}{3}$

定数は次元とともに動く。ゆえにそれは $\text{Vol}(S^{d-1})$ 、すなわち立体角である——論文128 が $\text{Vol}(S^{d-1})$ に置いた住所と同じであり、論文35 が事実の側に置いたポアソン方程式の 4π と同じものである。(証明終)

観察 5.4 (住所は逆問題である)

ω から $\mathbf{u}$ を求めるのは逆問題である。体系はこの一族を持っている——散乱 (論文89)、境界 (論文99)、統計 (論文106)。ビオ＝サヴァールはその最も素直な成員であり、 4π はそこに住んでいる。

ゆえに「渦定理の 4π 」という言い方は住所を間違えている。 4π は定理ではなく、定理から場を復元する道具の側にある。

6. 同じ場が、二つの資格の事実を持つ

検算 6.1 (渦度伸長は次元を選ぶ) : 渦度方程式の伸長項 $(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$ について、本稿では二次元流 $\mathbf{u} = (u(x, y), v(x, y), 0)$ に対して恒等的にゼロになること、三次元ではそうならないことを記号計算で確認した。(証明終)

観察 6.2 (だが恒等式は次元を選ばない)

$\nabla \cdot \omega = 0$ はどの次元でも成り立つ。使っているのは偏微分の交換だけであり、次元の情報を一つも参照していない。

観察 6.3 (一つの場合、二つの資格)

論文114 は次元を選ぶ側と選ばない側を分けた。 ω という一つの場合について、選ぶ事実 (伸長) と選ばない事実 (発散が消えること) が同居している。論文03 は前者を記録した。本稿は、後者がそれと資格を異にすることを書く。

そして三次元の未解決性は、選ぶ側にある。渦度が有限時間で発散しうるかという問いは伸長項の側の問いであって、第一定理の側の問いではない。恒等式は、何も未解決にしない。

7. 結論

1. 第一定理は恒等式である (検算2.2)。 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ は任意の滑らかな場について成り立ち、方程式を一つも仮定しない。「渦線は終われない」は運動学であって力学ではない。
2. $\nabla \cdot \omega = 0$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は別根である (観察3.2)。分離子は「その場が回転であることに失敗しうるか」——磁場は失敗しうる (磁気単極子)、渦度は定義ゆえ失敗しえない。
3. ケルヴィンの定理は三つの仮定を担っている (第4節)。順圧を落とせば傾圧トルクが渦度を生み ($\nabla \rho \times \nabla p = (0, 0, 1)$)、粘性を入れれば循環は減衰する (ラム＝オセーン、 $\partial_t \Gamma < 0$)。同じ名を冠した三つが二つの圏に分かれる。
4. 4π は定理の側には無い (第5節)。現れるのはビオ＝サヴァール、すなわち復元の式である。その定数は次元とともに動き ($d = 3$ から 8 で確認)、 $\text{Vol}(S^{d-1})$ すなわち立体角である (論文35・128)。 4π の住所は逆問題である (論文89・99・106)。
5. 一つの場合が二つの資格の事実を持つ (第6節)。伸長は次元を選び (2次元で恒等的に消える)、発散が消えることは次元を選ばない。三次元の未解決性は、選ぶ側にしかない。

結び：値段を書かずに定理を並べてはならない。ヘルムホルツの名を冠した三つのうち、一つは何も要求せず、二つは三つずつ要求する。そして 4π を探すなら、定理ではなく、そこから場を復元する式を見るべきである。指差した先に無いのは、指の向きが違うからである。

参考文献

1. Helmholtz, H. (1858). *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 55.
2. Thomson, W. (Lord Kelvin) (1869). *On vortex motion*. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 25.
3. Dirac, P. A. M. (1931). *Quantised singularities in the electromagnetic field*. Proceedings of the Royal Society A, 133.

4. Beale, J. T., Kato, T. & Majda, A. (1984). *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*. Communications in Mathematical Physics, 94.
5. Batchelor, G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
6. Saffman, P. G. (1992). *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.
7. Jackson, J. D. (1998). *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. Wiley.
8. 山岸勇輝 (2026). 山岸唯一性定理 ($\mathfrak{n} = \mathbf{2}$) [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
9. 山岸勇輝 (2026). ナビエ=ストークス方程式における無次元数とスケール [論文03] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404030
10. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
11. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
12. 山岸勇輝 (2026). $4\pi G$ の中の二つの 4π [論文35] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430118
13. 山岸勇輝 (2026). ゼロテンションと逆問題 [論文89]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21748664
14. 山岸勇輝 (2026). 共有された字母 (カルタン) [論文92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
15. 山岸勇輝 (2026). カルデロンの逆問題 [論文99]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758790
16. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
17. 山岸勇輝 (2026). 二つのネーター [論文107]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837205
18. 山岸勇輝 (2026). 極限としてのモジュール [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
19. 山岸勇輝 (2026). 四次元にいると知っているのは誰か [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
20. 山岸勇輝 (2026). 積分因子の存在は、温度を与えない [論文126]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079437
21. 山岸勇輝 (2026). $4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである [論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576
22. 山岸勇輝 (2026). $\hbar$ は、不等式の数学の側には無い [論文129]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079681

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)