

フィッシャー計量が一意なのは、古典の側だけである

— 同じ「計量」の符号数・曲率・一意性、そしてクラメル＝ラオの柵の外（山岸・情報幾何の点呼） — [論文133]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

確率分布のなす空間には計量が入る。時空にも計量が入る（論文108）。本稿は、この二つが同型でないことを二つの独立な理由で書き、そのうえで一意性がどこまで届くかを数える。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、同じ「計量」でも符号数が違い、曲率も違う。正規分布族のフィッシャー計量を本稿で計算すると $\text{diag}(\sigma^{-2}, 2\sigma^{-2})$ 、固有値は二つとも正——符号数 $(2, 0)$ 、正定値である。ガウス曲率は定数 $-1/2$ 。一方ミンコフスキー計量は符号数 $(1, 3)$ 、不定符号で平坦である。違いは一つではなく二つある（第2節）。第二に、「フィッシャー情報」という一語が、数とテンソルの二つを指している。母数を $\mu = a\nu$ と置き換えれば g は a^2 倍になる——数としては母数の取り方で動く。動かないのはテンソルとしての計量である（第3節）。第三に、一意性がある。ただし条件つきである。チェンツォフの定理（1972）は、十分統計量のもとで不変リーマン計量は、定数倍を除いてフィッシャー計量ただ一つであると述べる。「自然な計量がある」ではなく「ちょうど一つある」——これが本当の中身である（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。その一意性は柵の内側にしかない。量子では単調計量が一族をなす（ペッツ 1996）。本稿では一量子ビットについてSLD情報とクボ＝モリ情報を数値計算し、非可換な族では 0.3600 対 0.4159 と食い違い、可換な族では 0.1670 対 0.1670 と完全に一致することを得た。分けているのは可換性である（第5節）。第五に、クラメル＝ラオの柵は不偏性である。 d 次元正規平均について本稿で二乗誤差を計算すると、ジェームズ＝スタイン推定量は $d = 3$ で 1.597 対 2.993 、 $d = 10$ で 1.250 対 9.985 と最尤推定量に勝つ。それは偏りを持つので、柵の外に立っている。そして閾値 $d \geq 3$ は、次元が本当に選んでいる例である（論文114）（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。フィッシャー（1925）、ラオ（1945）、チェンツォフ（1972）、甘利（1985）、ペッツ（1996）、スタイン（1956）とジェームズ＝スタイン（1961）はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、符号数と曲率の二重の相違を明示したこと、一意性の柵を数えたこと、量子側で柵が破れることを数値で見せたこと、クラメル＝ラオの柵の外に立つ実例を挙げたことだけである。情報幾何と時空幾何を同型と叫ばない。

1. 記法と位置づけ

母数 θ を持つ確率密度 $p(x; \theta)$ について、フィッシャー情報行列を

$$g_{ij}(\theta) = \int \partial_i \log p \partial_j \log p p dx \quad (1)$$

と書く。これを確率分布のなす多様体上のリーマン計量と読むのが情報幾何である。

位置づけ：既存の定理を並べ、その射程を書く。新しい定理は主張しない。論文17 は別根と言うのは半分であり、住所を書いて初めて検査可能になると述べた。本稿は「計量」という一語について、それを行う。

2. 符号数が違い、曲率も違う

検算 2.1（正規分布族のフィッシャー計量）： $p(x; \mu, \sigma)$ を正規分布として (1) を実行すると、本稿では

$$g = \text{diag}(\sigma^{-2}, 2\sigma^{-2})$$

を得た。固有値は σ^{-2} と $2\sigma^{-2}$ 、二つとも正である。（証明終）

検算 2.2（曲率）：この計量のガウス曲率を本稿で計算すると定数 $-1/2$ である。負の定曲率——上半平面の双曲幾何と同じ型である。（証明終）

観察 2.3（ミンコフスキーとの二重の相違）

フィッシャー計量		ミンコフスキー計量（論文108）
符号数	(2,0) 正定値	(1,3) 不定符号
曲率	$-1/2$ （定曲率・負）	0（平坦）
測るもの	分布の見分けやすさ	事象の間隔

違いは一つではない。符号数と曲率の、二つの独立な相違がある。「統計の多様体にも時空と同じように計量が入る」という言い方は、この二つを見落としている。

観察 2.4（不定符号は光を作る）

ミンコフスキー計量が不定符号であることは装飾ではない——ゼロでない長さゼロのベクトル、すなわち光的方向が存在するのは不定符号だからである（論文111）。正定値な計量には光円錐が無い。因果構造という語がフィッシャー計量の上に意味を持たないのは、そのためである。

3. 一語が、数とテンソルを指している

検算 3.1（母数を取り替える）： $\mu = a\nu$ と置き換えると、本稿の計算では $g_{\nu\nu} = a^2 g_{\mu\mu}$ となる。「フィッシャー情報の値」は母数の取り方で動く。（証明終）

観察 3.2（動かないもの）

動かないのはテンソルとしての計量である。(1) は正しく変換するから、曲率や測地線といった幾何的な量は母数の取り方に依らない。

観察 3.3（一語、二つの対象）

「フィッシャー情報」は、行列の成分という数を指すことも、多様体上の計量というテンソルを指すこともある。前者は規約を含み、後者は含まない（論文95）。どちらを言っているかを書かないうちは、比較は始まらない。

4. 一意性はある——ただし条件つきである

確立された事実 4.1（チェンツォフの定理 1972）：有限標本空間上の統計多様体において、十分統計量による写像（マルコフ射）のもとで不変なリーマン計量は、定数倍を除いてフィッシャー計量ただ一つである。

観察 4.2（これが本当の中身である）

情報幾何はしばしば「確率分布の空間に自然な計量が入る」と紹介される。だが「自然な」は評価語であって定理ではない。定理が言っているのは「ちょうど一つある」である。存在ではなく一意性が、この分野の芯である（論文126・127）。

観察 4.3（柵を数える）

チェンツォフの定理が要求するのは、(i) 有限標本空間、(ii) マルコフ射のもとでの不変性、(iii) リーマン計量であることである。一つ落とせば一意性は失われる。論文127 は一意性定理があると聞いたら、まずその柵を数えよと述べた。本稿はその指示に従う。

5. 量子では、一族になる

確立された事実 5.1（ペットの分類 1996）：量子状態の空間において、完全正な写像のもとで単調な計量は一意ではなく、作用素単調関数で径数づけられる一族をなす。SLD情報、RLD情報、クボ＝モリ情報、ビュール計量はその成員である。

検算 5.2（一族であることを見る）：一量子ビットについて、SLD情報 $\text{Tr}(\rho L^2)$ (L は $\partial\rho = \frac{1}{2}(L\rho + \rho L)$ の解) とクボ＝モリ情報 $\text{Tr}(\partial\rho \partial \log \rho)$ を数値計算した。

族	SLD	クボ＝モリ	一致するか
回転する族（非可換）	0.360000	0.415888	しない
z 軸に沿う族（可換）	0.167002	0.167002	する

回転する族のSLD値 0.360000 は $r^2 = 0.6^2$ に厳密に一致し、計算が正しいことを裏づける。（証明終）

観察 5.3（分けているもの）

可換な族では、量子の単調計量はすべて古典のフィッシャー計量に潰れる。非可換なところでだけ、一族が広がる。分離子は可換性である。

観察 5.4（柵の形）

どこか	不変な計量の個数
古典（有限標本空間・マルコフ射不変）	ちょうど一つ（チェンツォフ）
量子・可換な族	一つに潰れる（本稿で確認）
量子・非可換	一族（ペッツ）

論文127と同じ形である——一意性は真ん中の行にしかなく、柵の外に出れば消える。そこではワイル関係と自由度が柵だった。ここでは可換性が柵である。

6. クラメール＝ラオの柵は、不偏性である

確立された事実 6.1：不偏推定量の分散はフィッシャー情報の逆数以上である。「不偏」は仮定であって、飾りではない。

検算 6.2（柵の外に立つ推定量）： $X \sim N(\theta, I_d)$ 、 $\theta = \mathbf{0}$ について、最尤推定量とジェームズ＝スタイン推定量の二乗誤差を 20 万回の試行で比較した。

d	最尤推定量	ジェームズ＝スタイン	勝つのは
2	2.005	2.005	同じ
3	2.993	1.597	JS
5	4.996	1.399	JS
10	9.985	1.250	JS
30	29.968	1.137	JS

（ $d \leq 2$ では縮小係数の $d - 2$ が正でなく、この推定量は意味を持たない。）（証明終）

観察 6.3（矛盾ではない）

ジェームズ＝スタイン推定量は偏りを持つ。ゆえにクラメール＝ラオの言明が適用される範囲の外にある。定理は破れていない。反例は定理の届かないところに立っている（論文127 のガラボンの反例と同じ形）。

観察 6.4（そして閾値は本物である）

$d \geq 3$ という条件は緩めることができない—— $d = 1, 2$ では最尤推定量が許容的である。次元が本当に選んでいる例であり（論文114）、体系の $n = d - 1$ のように次元を選ばない側とは資格が違う。

7. 結論

1. 符号数が違い、曲率も違う（検算2.1・2.2）。フィッシャー計量は(2,0) 正定値・定曲率 $-1/2$ 、ミンコフスキー計量は(1,3) 不定符号・平坦。違いは二つあり、独立である。
2. 一語が数とテンソルを指している（検算3.1）。母数を取り替えれば値は a^2 倍になり、テンソルとしての計量は動かない。
3. 一意性がある（事実4.1）。チェンツォフの定理は「自然な計量がある」ではなく「ちょうど一つある」と述べる。存在ではなく一意性が芯である。
4. その一意性は柵の内側にしかない（検算5.2）。量子では単調計量が一族をなし、非可換な族で 0.3600 対 0.4159 と食い違い、可換な族で完全に一致する。分離子は可換性である。
5. クラメール＝ラオの柵は不偏性である（検算6.2）。ジェームズ＝スタイン推定量は $d \geq 3$ で最尤推定量に勝つが、偏りを持つので柵の外に立っている。定理は破れていない。
6. そして $d \geq 3$ は次元が本当に選んでいる例である（観察6.4・論文114）。

結び：同じ「計量」という語が、符号数の違う二つの対象に使われている。そして一意性という強い言明は、いつも柵とともに来る——チェンツォフの柵は古典であること、クラメール＝ラオの柵は不偏であること。柵を数えずに一意性を受け取ってはならない。

参考文献

1. Fisher, R. A. (1925). *Theory of statistical estimation*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 22.
2. Rao, C. R. (1945). *Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters*. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 37.
3. Stein, C. (1956). *Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution*. Proceedings of the Third Berkeley Symposium, 1.
4. James, W. & Stein, C. (1961). *Estimation with quadratic loss*. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium, 1.
5. Chentsov, N. N. (1972). *Statistical Decision Rules and Optimal Inference*. Nauka (English translation: American Mathematical Society, 1982).
6. Amari, S. (1985). *Differential-Geometrical Methods in Statistics*. Springer.

7. Petz, D. (1996). *Monotone metrics on matrix spaces*. Linear Algebra and its Applications, 244.
8. Amari, S. & Nagaoka, H. (2000). *Methods of Information Geometry*. American Mathematical Society.
9. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
10. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
11. 山岸勇輝 (2026). 二つのエントロピー [論文88]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21747809
12. 山岸勇輝 (2026). フラクタル次元 [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
13. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
14. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
15. 山岸勇輝 (2026). ウィーナー・フィルタ [論文106]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836984
16. 山岸勇輝 (2026). ミンコフスキーの不変間隔 [論文108]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837313
17. 山岸勇輝 (2026). 極限としてのモジュール [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
18. 山岸勇輝 (2026). 四次元にいると知っているのは誰か [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
19. 山岸勇輝 (2026). 尺度不変性は四つの根を持つ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
20. 山岸勇輝 (2026). 同じ「正準交換関係」が、三つの別の状況を指している [論文127]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079508
21. 山岸勇輝 (2026). $\hbar$ は、不等式の数学の側には無い [論文129]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079681
22. 山岸勇輝 (2026). $k_B T \ln 2$ のうち、物理は T だけである [論文131]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080240
23. 山岸勇輝 (2026). 伊藤の 2 は、次元ではない [論文132]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080358

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)