

等式は厳密でも、平均は裾が握っている

— 第二法則はジャルジンスキー等式の系である：クルックス→ジャルジンスキー→第二法則という強さの階段（山岸・非平衡の点呼） — [論文136]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

ジャルジンスキー等式 $\langle e^{-\beta W} \rangle = e^{-\beta \Delta F}$ は、どれだけ激しく駆動しても成り立つ厳密な等式である。本稿はこの等式が何を含意し、そして何を含意しないかを書く。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、第二法則はこの等式のイェンセン系である。 e^x が凸であることから $\langle e^{-\beta W} \rangle \geq e^{-\beta \langle W \rangle}$ 、ゆえに $\langle W \rangle \geq \Delta F$ が従う。等式のほうが情報が多く、不等式はその一部にすぎない（第3節）。第二に、数値で確かめた。引きずられる調和トラップを過減衰ランジュヴァンで 20 万本走らせ、 $\Delta F = 0$ の設定で $\langle e^{-W} \rangle$ を測ると、引く速さ $v = 0.5, 1, 2$ で 0.9996、0.9986、0.9984 を得た。閉じた形 $\langle W \rangle = v^2(T - 1 + e^{-T})$ とも 0.7% 以内で一致する（第2節）。第三に、揺らぎと散逸を等式が結んでいる。測定値は $\langle W \rangle$ と $\sigma^2/2$ が一致する—— $v = 4$ で 5.885 対 5.865。仕事分布がガウス型なら、等式は $\sigma^2 = 2k_B T W_{\text{diss}}$ を強制する。揺動散逸関係が、等式の帰結として出てくる（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。指数平均は裾が握っている。 $W < \Delta F$ の経路——局所的に第二法則を破る経路——が平均に占める割合を測ると、 $v = 0.5$ では経路の 41.5% が平均の 58.5% を運ぶだけだが、 $v = 4$ では経路のわずか 4.3% が平均の 95.2% を運ぶ。強く駆動するほど、稀な経路がすべてを握る（第5節）。第五に、ゆえに厳密であることと測れることは別である。 $v = 4$ では 20 万本を使っても標本値は 0.8935 にしかならず、10 万本の部分標本での中央値は 0.904、1000 本なら 0.622 である。これは等式の破れではなく、推定量の破れである。真であることと、測れることは、別の性質である（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。ジャルジンスキー（1997）、クルックス（1999）、関本の確率エネルギー論、指数平均の収束問題はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、第二法則を系として位置づけたこと、裾の寄与を数値で測ったこと、厳密性と可測性を分けたこと、三つの言明を強さの階段に並べたことだけである。第二法則が破れるとは言わない（破れない）。

1. 記法と位置づけ

制御母数 λ を有限速度で動かす過程を考え、その仕事を W 、始端と終端の平衡自由エネルギーの差を ΔF と書く。逆温度を $\beta = 1/(k_B T)$ とする。ジャルジンスキー等式は

$$\langle e^{-\beta W} \rangle = e^{-\beta \Delta F} \tag{1}$$

である。平均は同じ手順を繰り返したときの経路にわたる平均である。

重要な注意： ΔF は終端の母数における平衡状態の自由エネルギーである——過程の終わりに系が平衡にある必要はない。非平衡の測定が平衡量を与える、というのが等式の眼目であり、ここを取り違えやすい。

位置づけ：既存の定理を並べ、その射程を書く。新しい定理は主張しない。論文17 は住所を書いて初めて検査可能になると述べた。

2. 等式は、どれだけ激しく駆動しても厳密である

設定 2.1： $k_B T = \gamma = k = 1$ とし、調和トラップの中心を一定速度 v で時間 $T = 1$ だけ引く。トラップの形は変わらないので $\Delta F = 0$ が厳密であり、(1) は $\langle e^{-W} \rangle = 1$ と読める。過減衰ランジュヴァン方程式を 20 万本、2000 刻みで走らせた。

検算 2.2

v	$\langle W \rangle$	σ^2	$\sigma^2/2$	$\langle e^{-W} \rangle$
0.5	0.09264	0.18439	0.09219	0.99957
1.0	0.36828	0.73450	0.36725	0.99860
2.0	1.46915	2.94712	1.47356	0.99838
4.0	5.88549	11.72969	5.86485	0.89350

検算 2.3（閉じた形との照合）：この系は厳密に解ける。 $\langle W \rangle = v^2(T - 1 + e^{-T})$ 、 $\sigma^2 = 2k_B T \langle W \rangle$ であり、仕事分布はガウス型である。本稿の値との差は $\langle W \rangle$ で 0.7% 以内、 σ^2 で 0.4% 以内である。（証明終）

観察 2.4（最後の行について）

$v = 4$ の 0.89350 は等式の破れではない。閉じた形に代入すれば $\langle e^{-W} \rangle = e^{-\langle W \rangle + \sigma^2/2} = e^0 = 1$ がどの v でも厳密に成り立つ。崩れているのは推定量である（第6節）。

3. 第二法則は、イエンセンの系である

観察 3.1 (導出)

e^x は凸だから、イエンセンの不等式により

$$\langle e^{-\beta W} \rangle \geq e^{-\beta \langle W \rangle}.$$

(1) と併せれば $e^{-\beta \Delta F} \geq e^{-\beta \langle W \rangle}$ 、すなわち

$$\langle W \rangle \geq \Delta F$$

——これが第二法則である。(証明終)

観察 3.2 (強さの差)

等式は不等式より多くを述べている。イエンセンの不等式は分布の平均しか使わない——分布の形を捨てている。等式は形を全部使う。第二法則は、その情報を捨てたあとに残るものである。

観察 3.3 (体系の中での位置)

論文126 は存在定理は存在しか与えないと述べ、論文135 は二つの美点は互いを排除しうると述べた。ここでは逆向きの関係である——強い言明から弱い言明が落ちてくる。系であることを書かないと、二つが対等な法則に見えてしまう。

4. 揺らぎと散逸は、等式が結んでいる

観察 4.1

検算2.2 の表で $\langle W \rangle$ と $\sigma^2/2$ が一致している。 $v = 4$ では 5.88549 対 5.86485 である。

観察 4.2（なぜ一致するのか）

仕事分布がガウス型 $N(\mu, \sigma^2)$ ならば $\langle e^{-\beta W} \rangle = e^{-\beta\mu + \beta^2\sigma^2/2}$ である。これが $e^{-\beta\Delta F}$ に等しいことを要求すると

$$\sigma^2 = \frac{2}{\beta} (\mu - \Delta F) = 2k_B T W_{\text{diss}}$$

が強制される。揺らぎの大きさと散逸の大きさが結ばれる——揺動散逸関係が、等式の帰結として出てくる（論文78）。

観察 4.3（ただし条件つきである）

この形はガウス型のときにだけ成り立つ。一般には等式のほうが広く、揺動散逸関係はその線形応答の場合である。同じ内容だと思ってはならない。

5. 平均は、裾が握っている

検算 5.1（誰が平均を運んでいるか）： $W < \Delta F$ の経路、すなわち局所的に第二法則を破る経路が、指数平均 $\langle e^{-W} \rangle$ に占める割合を測った。

v	その経路の割合	平均に占める寄与	比
0.5	0.4147	0.5846	1.4 倍
1.0	0.3340	0.6654	2.0 倍
2.0	0.1963	0.8042	4.1 倍
4.0	0.0426	0.9517	22.3 倍

$v = 4$ では、経路のわずか **4.3%** が平均の **95.2%** を運んでいる。（証明終）

観察 5.2（何が起きているか）

$e^{-\beta W}$ は W が小さいほど大きい。したがって指数平均は左の裾に重みを置く。強く駆動するほど左の裾は遠ざかり、稀になり、そして重くなる。

観察 5.3（第二法則との関係）

$W < \Delta F$ の経路は「第二法則を破っている」。個々の経路については破れうる——破れないのは平均である。そして等式が成り立つためには、その破れが必要である。破れが無ければ $\langle e^{-\beta W} \rangle$ は $e^{-\beta \Delta F}$ に届かない。

これは論文132 が「平均リターン」について述べたことと同じ形である——裾が厚いとき、平均は「よくある結果」を表さない。ここでは平均そのものが裾で作られている。

6. 厳密であることと、測れることは別である

検算 6.1（推定量の偏り）： $v = 4$ の標本から N 本を取って $\langle e^{-W} \rangle$ を推定し、200 回の中央値をとった。

N	推定値の中央値	真値からの不足
10	0.0718	92.8%
100	0.3077	69.2%
1000	0.6225	37.8%
10000	0.7903	21.0%
100000	0.9039	9.6%

10 万本でもまだ 1 割足りない。（証明終）

観察 6.2（偏りの向き）

推定値は常に下から近づく。標本が稀な左の裾を含んでいないあいだ、平均は小さく出る。必要な標本数は散逸とともに指数的に増える。

観察 6.3（これが本稿の要点である）

等式は厳密である。推定量はほとんど使えない。真であることと、測れることは別の性質である。そして表の 0.89350 を見て「等式が破れた」と言うてはならない——破れているのは、こちらの数え方のほうである。

論文135 と同じ形である——そこでは体積とエネルギーが互いを排除した。ここでは厳密性と可測性が離れている。

7. 強さの階段

観察 7.1（三段）

言明	何を述べるか	強さ
クルックスの定理	順逆の仕事分布の比	最も強い
ジャルジンスキー等式	指数平均の値	中間（積分すれば出る）
第二法則	平均の不等号	最も弱い（イェンセン）

観察 7.2（落ちていく情報）

クルックスは分布の形を全部述べる。ジャルジンスキーはそれを一つの数に潰す。第二法則はその数を不等号に潰す。一段下りるたびに情報が落ちる。そして下の段は上の段の系であって、独立な法則ではない。

観察 7.3（仕事の定義について）

W が何を指すかは、確率過程の枠組みでは規約を含む（関本の確率エネルギー論、包含仕事と排他仕事）。 ΔF は規約に依らないが、 W の定義は書かねばならない（論文95）。

8. 結論

1. 等式は厳密である（検算2.2・2.3）。閉じた形との差は $\langle W \rangle$ で 0.7% 以内、 σ^2 で 0.4% 以内。どれだけ激しく駆動しても成り立つ。
2. 第二法則はイエンセンの系である（観察3.1）。等式のほうが情報が多く、不等式は分布の形を捨てたあとに残るものである。
3. 揺動散逸関係は等式の帰結である（観察4.2）。ガウス型なら $\sigma^2 = 2k_B T W_{\text{diss}}$ が強制される（ $v = 4$ で 5.885 対 5.865）。ただしガウス型のときだけである。
4. 平均は裾が握っている（検算5.1）。 $v = 4$ では経路の 4.3% が平均の 95.2%。局所的に第二法則を破る経路が無ければ、等式は成り立たない。
5. 厳密であることと測れることは別である（検算6.1）。10 万本でも 9.6% 足りない。0.89350 は等式の破れではなく推定量の破れである。
6. 三つの言明は強さの階段をなす（観察7.1）。クルックス→ジャルジンスキー→第二法則。下の段は上の段の系である。

結び：第二法則は、より強い等式から情報を捨てて得られる。そしてその等式を支えているのは、第二法則を局所的に破る稀な経路である。数え上げられないほど稀なものが、平均を握っている——厳密な式を手にしても、測れるとは限らない。

参考文献

1. Jarzynski, C. (1997). *Nonequilibrium equality for free energy differences*. Physical Review Letters, 78.
2. Crooks, G. E. (1999). *Entropy production fluctuation theorem and the nonequilibrium work relation for free energy differences*. Physical Review E, 60.
3. Sekimoto, K. (1998). *Langevin equation and thermodynamics*. Progress of Theoretical Physics Supplement, 130.
4. Liphardt, J., Dumont, S., Smith, S. B., Tinoco, I. & Bustamante, C. (2002). *Equilibrium information from nonequilibrium measurements in an experimental test of Jarzynski's equality*. Science, 296.
5. Jarzynski, C. (2006). *Rare events and the convergence of exponentially averaged work values*. Physical Review E, 73.
6. Seifert, U. (2012). *Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines*. Reports on Progress in Physics, 75.
7. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
8. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
9. 山岸勇輝 (2026). リウヴィルと時間の矢 [論文77]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21722473
10. 山岸勇輝 (2026). 摩擦は粗視化である [論文78]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21731937
11. 山岸勇輝 (2026). 二つのエントロピー [論文88]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21747809

12. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
13. 山岸勇輝 (2026). 過去仮説 [論文98]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758739
14. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
15. 山岸勇輝 (2026). ウィーナー・フィルタ [論文106]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836984
16. 山岸勇輝 (2026). 極限としてのモジュール [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
17. 山岸勇輝 (2026). 尺度不変性は四つの根を持つ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
18. 山岸勇輝 (2026). $k_B T \ln 2$ のうち、物理は T だけである [論文131]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080240
19. 山岸勇輝 (2026). フィッシャー計量が一意なのは、古典の側だけである [論文133]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080550
20. 山岸勇輝 (2026). 体積か、エネルギーか——両方は取れない [論文135]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081063

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)