

対称性は比を決め、力学は尺度を決める

— ウィグナー＝エッカートの定理が分けている三層：強制された幾何・測られる力学・選ばれた位相

— [論文140]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

ウィグナー＝エッカートの定理は、テンソル演算子の行列要素をクレブシュ＝ゴルダン係数と換算行列要素の積に分ける。本稿は、この分け方が体系の「規約と事実」の分け方とは別のものであること、そして実は層が三つあることを書く。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、数の勘定が主張の全部である。 $j=j'=1$ 、階数 1 のテンソル演算子なら行列要素は 27 個あるが、定理はそれを 1 個に潰す。残りはすべてクレブシュ＝ゴルダン係数である（第2節）。第二に、比は自由な媒介変数なしに決まる。本稿では 27 個の係数を計算し、非零は 6 個、それらが互いの固定倍であることを確認した。さらに $\langle 10|T_0|10\rangle = 0$ —— Δm の規則よりも細かい選択則が、あらかじめは見えない形で出てくる（第3節）。第三に、選択則は定理の零集合である。 $j'=0 \rightarrow j=0$ がベクトル演算子で禁じられるのは、係数がそこでゼロだからである（本稿で確認）。選択則は追加の仮定ではなく、比の言明を零点で読んだものである。ただし j の規則と m の規則は別の言明である（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。層は二つではなく三つある。換算行列要素に任意の位相 $e^{i\theta}$ を掛けると、個々の行列要素は θ とともに動き、比では θ が消える（本稿で確認）。幾何（強制）・力学（測定）・位相（規約）の三層であり、体系の二分法をそのまま当てると三つ目を見落とす（第5節）。第五に、定理は大きさを一切与えない。換算行列要素は対称性によって全く決まらない。群は、遷移が強い弱いかを教えない——教えるのは多重項の中での強さの関係だけである。「対称性がスペクトルを説明する」は半分の文である（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。ウィグナー、エッカート、クレブシュ＝ゴルダン係数、コンドン＝ショートリーの位相規約はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、対称性と力学の分離が規約と事実の分離ではないと明示したこと、位相という第三層を数えたこと、比の不変性を記号計算で確かめたことだけである。係数の数値は sympy のクレブシュ＝ゴルダン実装により本稿で計算した。

1. 記法と位置づけ

階数 k の既約テンソル演算子 $T_q^{(k)}$ について、ウィグナー＝エッカートの定理は

$$\langle jm|T_q^{(k)}|j'm'\rangle = \langle j'm';kq|jm\rangle \langle j\|T^{(k)}\|j'\rangle \tag{1}$$

と述べる。第一因子がクレブシュ＝ゴルダン係数、第二因子が換算行列要素であり、後者は m 、 m' 、 q に依らない。

位置づけ：既存の定理を並べ、その分け方の身分を書く。新しい定理は主張しない。論文95 は規約と事実を分け、論文129 と論文131 は数学が形を与え物理が目盛りを与えると述べた。本稿はその刃を (1) に当てるが、まず刃が合わないことを書く。

2. 数の勘定が、主張の全部である

観察 2.1

(1) の左辺は m 、 m' 、 q の三つで走る。したがって行列要素の総数は $(2j+1)(2j'+1)(2k+1)$ である。

j	j'	k	行列要素の数	独立な数
1	1	1	27	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	24	1
2	1	1	45	1
2	2	2	125	1

定理が述べているのは、この潰れである。残りはすべてクレブシュ＝ゴルダン係数、すなわち群が決める数である。

3. 比は、自由な媒介変数なしに決まる

検算 3.1： $j = j' = 1$ 、 $k = 1$ について 27 個の係数を計算した。行 m 、列 (m', q) 、値は換算行列要素 R の係数である。

m	(1, 0)	(0, 1)	(1, -1)	(-1, 1)	(0, -1)	(-1, 0)
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				
0			$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
-1					$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

非零は 27 個のうち 6 個であり、どれも互いの固定倍である。比には自由な媒介変数が一つも無い。(証明終)

検算 3.2 (あらかじめは見えない選択則) : $m = m' = q = 0$ の係数は

$$\langle 10; 10 | 10 \rangle = 0, \quad \text{すなわち} \quad \langle 10 | T_0 | 10 \rangle = 0$$

である。 $\Delta m = 0$ は満たしているのに消える。(証明終)

観察 3.3

Δm の規則だけを知っていても、この零点は予想できない。定理は「どれが許されるか」だけでなく「許されているのにゼロになるのはどこか」まで与えている。

4. 選択則は、定理の零集合である

検算 4.1 : 階数 1 のテンソル演算子について、 $m = m' = 0$ の係数を並べた。

(j', j)	係数	j の規則
(0, 0)	0	禁止
(0, 1)	1	許可
(1, 1)	0	許可 ($m = 0$ でだけ消える)
(1, 2)	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	許可
(1, 3)	0	禁止

$j' = 0 \rightarrow j = 0$ がベクトル演算子で禁じられるのは、係数がそこでゼロだからである。(証明終)

観察 4.2

選択則は追加の仮定ではない。それは比の言明を、係数がゼロになる場所で読んだものである。規則と比は同じ一つの言明であり、読む場所が違うだけである。

観察 4.3（ただし二つの規則は別である）

表の (1,1) の行は、 j の規則では許されているのに $m = 0$ で係数が消える場合である。 j についての規則と m についての規則は、別の言明である（論文17）。

5. 層は二つではなく、三つある

検算 5.1（位相を掛けてみる）：換算行列要素に任意の位相 $e^{i\theta}$ を掛けると、本稿の記号計算では

個々の要素 $= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} Re^{i\theta}$ (θ とともに動く), 比 $= -1$ (θ が消える)

となる。（証明終）

観察 5.2（三つの層）

層	何が決めるか	身分
クレブシュ＝ゴルダン係数	群	強制（事実）
換算行列要素の大きさ	力学	測定（事実）
その位相と符号	こちらの選択	規約（コンドン＝ショートリー）

観察 5.3（体系の二分法とは違う）

ウィグナー＝エッカートが分けているのは「規約と事実」ではない。クレブシュ＝ゴルダン係数も換算行列要素も、どちらも事実である——片方は群が決め、片方は測定が決める。分離子は「こちらが選んだかどうか」ではなく「答えが何に依存するか」である。

そして規約は第三の層として、別に存在する。二分法をそのまま当てると、この三つ目を見落とす。観測に出るのは比だけであり、位相はそこで消える。

観察 5.4 (体系の中の同型)

論文112は「枠が配られ、中では自由」という形を六つの別根で点呼した。ここでも枠（クレブシュ＝ゴールデン係数）は配られており、中の一つの数だけが自由である。ただし住所は違う——そこでの自由は状態の自由、ここでの自由は結合の強さである。

6. 定理は、大きさを与えない

観察 6.1

(1)の換算行列要素は、対称性によって全く決まらない。群は、その遷移が強いかわいさを一言も教えない。

観察 6.2 (同じ形が三度目である)

論文129は $\frac{1}{2}$ は数学が出し $\hbar$ は物理が出すと述べ、論文131は $\ln 2$ は規約で T が物理と述べた。ここでは、比は対称性が出し、尺度は力学が出す。三つとも「形と目盛りが別のところから来る」という同じ形である。

観察 6.3 (それでも軽くない)

比が完全に決まることは、それ自体が強い予言である。一つの測定が多重項の全部を決める。そして測定が比から外れれば、対称性の仮定が疑われる——反証可能な形をしている。

7. 結論

1. 数の勘定が主張の全部である（観察2.1）。 $j = j' = 1$ 、 $k = 1$ なら27個が1個に潰れる。
2. 比は自由な媒介変数なしに決まる（検算3.1）。非零は27個中6個で、互いの固定倍。
3. あらかじめは見えない選択則が出る（検算3.2）。 $\langle 10|T_0|10 \rangle = 0$ —— Δm の規則は満たしているのに消える。

4. 選択則は零集合である（検算4.1）。 $j' = 0 \rightarrow j = 0$ の禁止は、係数がゼロであること。ただし j の規則と m の規則は別の言明（観察4.3）。
5. 層は三つある（検算5.1）。幾何（強制）・力学（測定）・位相（規約）。分けているのは「こちらが選んだか」ではなく「何に依存するか」であり、体系の二分法をそのまま当てると三つ目を見落とす。
6. 定理は大きさを与えない（観察6.1）。対称性は比を、力学は尺度を与える——論文129・131 と同じ形である。

結び：「対称性がスペクトルを説明する」は半分の文である。対称性が説明するのは多重項の中の比であって、そのどれ一つの大きさでもない。そして比を読むときには、位相という第三の層が消えていることを確かめておく必要がある——観測に出るのは、三つの層のうち二つだけである。

参考文献

1. Wigner, E. P. (1931). *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*. Vieweg.
2. Eckart, C. (1930). *The application of group theory to the quantum dynamics of monatomic systems*. Reviews of Modern Physics, 2.
3. Condon, E. U. & Shortley, G. H. (1935). *The Theory of Atomic Spectra*. Cambridge University Press.
4. Racah, G. (1942). *Theory of complex spectra II*. Physical Review, 62.
5. Edmonds, A. R. (1957). *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton University Press.
6. Sakurai, J. J. & Napolitano, J. (2017). *Modern Quantum Mechanics*, 2nd ed. Cambridge University Press.
7. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
8. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
9. 山岸勇輝 (2026). ガロアからネーターへ [論文85]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21741344
10. 山岸勇輝 (2026). 必然の根 [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
11. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
12. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
13. 山岸勇輝 (2026). 二つのネーター [論文107]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837205
14. 山岸勇輝 (2026). 配られた領域 [論文112]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962834
15. 山岸勇輝 (2026). 尺度不変性は四つの根を持つ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
16. 山岸勇輝 (2026). $\hbar$ は、不等式の数学の側には無い [論文129]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079681
17. 山岸勇輝 (2026). $k_B T \ln 2$ のうち、物理は T だけである [論文131]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080240
18. 山岸勇輝 (2026). フィッシャー計量が一意なのは、古典の側だけである [論文133]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080550
19. 山岸勇輝 (2026). KL は距離ではない。だが、その二階微分は計量である [論文137]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081369

20. 山岸勇輝 (2026). どこまでがハミルトニアンかは、規約である [論文138]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081512
21. 山岸勇輝 (2026). 重なりを測るのか、隔たりを測るのか [論文139]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081801

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)