

# 指数は、何が保存しているかの署名である

— セドフ＝テイラー解の  $2/5$ 、次元が動かす指数、そして次元解析が見られない  $\gamma$  — [論文144]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

## 要旨

一様な媒質の中で解き放たれたエネルギーが作る衝撃波は、半径が時間の  $2/5$  乗で広がる。超新星残骸の観測で日常的に使われる法則である。本稿は、この指数がどこから来て、どこから来ていないかを書く。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、指数は次元とともに動く。 $R = E^a t^b \rho^c$  の次元方程式を  $d$  次元で解くと  $R \propto (Et^2/\rho)^{1/(d+2)}$ 、すなわち  $R \propto t^{2/(d+2)}$  である（本稿で記号計算）。 $d=1$  で  $2/3$ 、 $2$  で  $1/2$ 、 $3$  で  $2/5$ 、 $4$  で  $1/3$ 。 $2/5$  は自然定数ではなく、指数についての連立一次方程式の解である（論文28・117）（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。指数は「何が保存しているか」の署名である。エネルギーが保存すれば  $t^{2/(d+2)}$ 、運動量が保存すれば  $t^{1/(d+1)}$ ——三次元では  $2/5$  対  $1/4$  である。本稿では閉じた形の局所対数傾きを計算し、 $t = 10^8$  で  $0.40000000$  と  $0.25000000$  に収束することを確認した。放射で熱が逃げると、衝撃波は  $2/5$  の法則を離れて運動量保存の側に移る。指数は、爆発の性質ではなく保存則の署名である（第3節）。第三に、次元解析は  $\gamma$  を見ることができない。変数は  $R, E, t, \rho$  の四つ、次元は  $M, L, T$  の三つだから、無次元量はちょうど一つ、すなわち未定の定数もちょうど一つである。そして比熱比  $\gamma$  はすでに無次元だから、次元解析には最初から見えない。関係は  $R(\rho/(Et^2))^{1/(d+2)} = C(\gamma)$  となり、 $C(\gamma)$  は自己相似方程式を解かなければ出ない（第4節）。第四に、ゆえにここでも三つの層がある。形（次元解析・強制）/ $C(\gamma)$ （自己相似解・計算）/ $\gamma$ （媒質・入力）。論文140・141 と同じ形である（第5節）。第五に、指数が次元解析から出ない自己相似もある。収束衝撃波のような第二種の自己相似では、指数は次元解析では決まらず、解が特異点を滑らかに通る条件（固有値問題）が決める。「自己相似」という一語が、指数の出所の違う二つを指している（論文117）（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。テイラー（1950）、セドフ（1946）、フォン・ノイマン、バレンブラットによる第一種・第二種の区別はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、指数を保存則の署名として書いたこと、バッキンガムの数え上げから「 $\gamma$  は見えない」を導いたこと、局所対数傾きで指数の収束を確かめたこと、第一種と第二種を別根として並べたことだけである。 $C(\gamma)$  の数値は本稿では計算していない——計算していない数は書かない。

## 1. 記法と位置づけ

密度  $\rho$  の一様な媒質の中で、点状にエネルギー  $E$  が解き放たれたとする。衝撃波の半径を  $R(t)$  と書く。背景の圧力は無視できるものとする。

位置づけ：既存の結果を並べ、指数の出所を書く。新しい定理は主張しない。論文28 は指数は次元ではないと述べ、論文117 は尺度不変性に四つの根があると述べた。本稿はその二つをセドフ＝テイラー解に当てる。

なお本稿はこの解を、今日それが使われている場所——超新星残骸の膨張——の文脈で扱う。

## 2. 指数は、次元とともに動く

検算 2.1：  $R = E^a t^b \rho^c$  と置き、 $d$  次元で  $[E] = ML^2T^{-2}$ 、 $[\rho] = ML^{-d}$  として次元方程式を解くと、本稿の記号計算では

$$a = \frac{1}{d+2}, \quad b = \frac{2}{d+2}, \quad c = -\frac{1}{d+2}$$

すなわち

$$R \propto \left( \frac{Et^2}{\rho} \right)^{1/(d+2)} \propto t^{2/(d+2)}.$$

(証明終)

| $d$ | $t$ の指数 |
|-----|---------|
| 1   | 2/3     |
| 2   | 1/2     |
| 3   | 2/5     |
| 4   | 1/3     |

### 観察 2.2

2/5 は自然定数ではない。指数についての連立一次方程式の解であり、次元が変われば動く。論文28 は指数を次元と取り違えてはならないと述べたが、ここでの指数は次元の関数である——それでも指数そのものは次元ではない。

3. 指数は、何が保存しているかの署名である

観察 3.1（二つの保存則）

掃き集められた質量を  $\rho R^d$  程度と見ると、

エネルギー保存： $\rho R^d \dot{R}^2 = \text{一定}$ ，      運動量保存： $\rho R^d \dot{R} = \text{一定}$

であり、それぞれ

$$R \propto t^{2/(d+2)}, \quad R \propto t^{1/(d+1)}$$

を与える。

| $d$ | エネルギー保存   | 運動量保存     |
|-----|-----------|-----------|
| 1   | $t^{2/3}$ | $t^{1/2}$ |
| 2   | $t^{1/2}$ | $t^{1/3}$ |
| 3   | $t^{2/5}$ | $t^{1/4}$ |

検算 3.2： $R(1) = 1$  から出発すると、どちらの式も  $R^p = 1 + p(t - 1)$ （エネルギーで  $p = (d + 2)/2$ 、運動量で  $p = d + 1$ ）と閉じた形で解ける。局所対数傾き  $d \ln R / d \ln t$  は

| $t$    | エネルギー保存           | 運動量保存             |
|--------|-------------------|-------------------|
| 10     | 0.42553191        | 0.27027027        |
| $10^2$ | 0.40241449        | 0.25188917        |
| $10^4$ | 0.40002400        | 0.25001875        |
| $10^8$ | <b>0.40000000</b> | <b>0.25000000</b> |

と収束する。（証明終）

### 観察 3.3 (これが芯である)

二つの法則を分けているのは指数だけである。爆発の詳細を何も知らなくても、半径と時間の対数を取って傾きを見れば、どちらの量が保存しているかが読める。

そして実際の超新星残骸は、途中で乗り換える。放射で熱が逃げ始めるとエネルギーはもはや保存せず、衝撃波は  $2/5$  の法則を離れて運動量保存の側へ移る。指数は「爆発の性質」ではなく「いま何が保存しているか」の署名である。

### 観察 3.4 (体系の言い方で)

論文135 は誤差が「ドリフトか振動か」は大きさでなく比例則で見よと述べた。ここでも同じである——大きさは何も告げず、指数が告げる。

## 4. 次元解析は、 $\gamma$ を見るができない

### 観察 4.1 (バッキンガムの数え上げ)

変数は  $R$ 、 $E$ 、 $t$ 、 $\rho$  の四つ、独立な次元は  $M$ 、 $L$ 、 $T$  の三つである。したがって無次元量は  $4 - 3 = 1$  個、すなわち未定の定数はちょうど一つである。

### 観察 4.2 ( $\gamma$ を加えても増えない自由度)

比熱比  $\gamma$  はすでに無次元である。加えれば数え上げは  $5 - 3 = 2$  個になり、関係は

$$R \left( \frac{\rho}{Et^2} \right)^{1/(d+2)} = C(\gamma)$$

と書ける。すなわち次元解析は  $\gamma$  について何も言えない。無次元の量は、次元解析にとって最初から見えないのである。

観察 4.3 （有名な話の残り半分）

一枚の写真から半径と時刻を読み、次元解析だけでエネルギーを言い当てたという話は有名である。その通りだが、半分である。残りの半分は  $C(\gamma)$  という数であり、それは媒質の性質に依存し、自己相似方程式を解かなければ出ない。

本稿では  $C(\gamma)$  の値を計算していない。計算していない数は書かない（論文101）。

5. ここでも、三つの層がある

観察 5.1

| 何が                                  | 何によって決まるか | 身分 |
|-------------------------------------|-----------|----|
| 形 $R \propto (Et^2/\rho)^{1/(d+2)}$ | 次元解析      | 強制 |
| 定数 $C(\gamma)$                      | 自己相似方程式の解 | 計算 |
| $\gamma$                            | 媒質        | 入力 |

観察 5.2

論文140（対称性・力学・位相）と論文141（次元・レーン＝エムデン・組成）と同じ三層である。三度続けて同じ形が出た——強制された形、計算されるべき数、供給されるべき入力。二分法では足りない、というのが共通の教訓である。

6. 指数が次元解析から出ない自己相似もある

観察 6.1 （第一種と第二種）

セドフ＝テイラー解の指数は次元解析だけで決まる。これを第一種の自己相似という。

ところが、中心へ収束する衝撃波のような問題では、指数は次元解析からは決まらない。そこでは指数は、解が特異点を滑らかに通り抜けるという条件——固有値問題——によって決まる。これを第二種の自己相似という（バレンブラット）。

|          | 第一種       | 第二種    |
|----------|-----------|--------|
| 指数を決めるもの | 次元解析      | 固有値条件  |
| 値        | 有理数（次元から） | 一般に無理数 |
| 例        | セドフ＝テイラー  | 収束衝撃波  |

観察 6.2（一語、二つの根）

「自己相似」という一語が、指数の出所の違う二つを指している。論文117 は尺度不変性の四つの根を挙げたが、その根Bは次元行列である。第一種はその根Bに属し、第二種は属さない。分離子は「指数が次元解析で決まるか」である。

観察 6.3（指数が有理数かどうか手がかりになる）

次元行列の解は有理数である——連立一次方程式の解だからである。したがって観測された指数が無理数であれば、それは次元解析からは出ていない。指数の有理性そのものが、根を見分ける手がかりになる。

7. 結論

1. 指数は次元とともに動く（検算2.1）。 $R \propto t^{2/(d+2)}$  で、 $d = 1, 2, 3, 4$  に対し  $2/3, 1/2, 2/5, 1/3$ 。2/5 は自然定数ではない。
2. 指数は保存則の署名である（検算3.2）。エネルギー保存で 2/5、運動量保存で 1/4、局所傾きは  $t = 10^8$  で 0.40000000 と 0.25000000。放射で熱が逃げれば乗り換える。
3. 次元解析は  $\gamma$  を見られない（観察4.2）。 $\gamma$  はすでに無次元だから、関係は  $C(\gamma)$  を残す。有名な話は半分である。
4. 三つの層がある（観察5.1）。形（強制）・  $C(\gamma)$ （計算）・  $\gamma$ （入力）。論文140・141 と同じ、三度目。
5. 第二種の自己相似では指数が次元解析から出ない（観察6.1）。固有値条件が決め、一般に無理数になる。
6. 指数の有理性が根を見分ける手がかりになる（観察6.3）。次元行列の解は必ず有理数である。

結び：半径と時間の対数を取って傾きを見れば、いま何が保存しているかが読める。指数は、爆発の激しさでも媒質の細部でもなく、保存則の署名である。そして指数が有理数でなくなったとき、それは次元解析の外から来たという合図である。

## 参考文献

---

1. Taylor, G. I. (1950). *The formation of a blast wave by a very intense explosion*. Proceedings of the Royal Society A, 201.
2. Sedov, L. I. (1946). *Propagation of strong shock waves*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 10.
3. von Neumann, J. (1947). *The point source solution*. Los Alamos Scientific Laboratory report (reprinted in Collected Works, vol. 6).
4. Barenblatt, G. I. (1996). *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press.
5. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1987). *Fluid Mechanics*, 2nd ed. Pergamon.
6. Ostriker, J. P. & McKee, C. F. (1988). *Astrophysical blastwaves*. Reviews of Modern Physics, 60.
7. 山岸勇輝 (2026). 無次元だけが調整されうる [論文10] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404556
8. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
9. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
10. 山岸勇輝 (2026). 山岸・ケプラー方程式—— $3/2$  は次元ではない [論文28] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430531
11. 山岸勇輝 (2026). フラクタル次元 [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
12. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
13. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
14. 山岸勇輝 (2026). エディントン——先祖であり戒めである [論文101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382
15. 山岸勇輝 (2026).  $c$  の指数は何を数えているか [論文116]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22003794
16. 山岸勇輝 (2026). 尺度不変性は四つの根を持つ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
17. 山岸勇輝 (2026). 対称性は比を決め、力学は尺度を決める [論文140]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081997
18. 山岸勇輝 (2026). 限界が存在するのは、二つの力が同じ指数を持つからである [論文141]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082127
19. 山岸勇輝 (2026). 最小エントロピー生成は、原理ではなく柵つきの定理である [論文143]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082367

---

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)