

ディラックの弦は、一枚の紙で書こうとした跡である

— 「回転であることに失敗しうる」の住所は $H^2(S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$: 貼り合わせの失敗と電荷の量子化 —

[論文146]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月 (第2版)

— From thinking to syncing. —

要旨

論文138は、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が恒等式ではなく法則である理由を「その場が回転であることに失敗しうるか」に置いた。本稿はその失敗に名前と住所を与える。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、ディラックの弦は場の性質ではなく、書き方の跡である。 $A_N = g(1 - \cos \theta) d\varphi$ は南極を除いて滑らか、 $A_S = -g(1 + \cos \theta) d\varphi$ は北極を除いて滑らかであり、本稿ではどちらも同じ場の強さを与えることを確認した。二枚に分けて書けば、弦はどこにも現れない。弦は「一枚で書く」と決めたことの帰結である (第2節)。

第二に、重なりでの差はチェックの1-コチェインである。 $A_N - A_S = 2g d\varphi$ 、すなわち $\chi = 2g\varphi$ 。これが二枚の被覆のただ一つの重なりに付いた数であり、束そのものである (第3節)。第三に、これが本稿の芯である。貼り合わせが閉じることが、電荷の量子化である。赤道を一周すると位相は $4\pi eg/\hbar$ だけ変わる。一価であるためにはこれが 2π の整数倍でなければならず、 $2eg/\hbar = n$ ——ディラックの量子化条件である (本稿で確認)。量子化は力学の帰結ではなく、遷移関数が閉じるという貼り合わせの条件である (第4節)。第四に、不変量は整数であって 4π ではない。球面上での場の積分は $4\pi g$ である。その 4π は $\text{Vol}(S^2)$ (論文128)。一方チャーン数は $(1/2\pi) \int F = 2eg/\hbar = n$ であり、こちらが不変量である。 4π は生成元の正規化、 n は類 (第5節)。第五に、層の見方が入るのはここである。束の同型類は $H^1(M, U(1)) \cong H^2(M, \mathbb{Z})$ で分類される (指数列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow U(1) \rightarrow 0$)。 $M = S^2$ でこれは $\mathbb{Z}$ であり、上で出た整数がその元である。層は「局所の資料と重なりでの一致」の記帳法であり、内容は貼り合わせの失敗を測るコホモロジーである (第6節)。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。ディラック（1931）、ウー＝ヤン（1975）の二枚張り、チェルン類、層コホモロジーと指数列はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、論文138 が置いた分離子に住所を与えたこと、弦が書き方の跡であることを二枚の潜在的表示で示したこと、量子化を貼り合わせの条件として書いたこと、 4π と整数を分けたことだけである。磁気単極子が存在するとは主張しない（発見されていない）。本稿が扱うのは「もし在れば何が強制されるか」である。層について一言：「球殻フラックスは層に似ている」という言い方は韻であって機械ではない（論文100）。機械になるのは「フラックスはド・ラーム類であり、その整数性はチェックの障害である」という言い方のほうである。本稿はその線だけを引く。

1. 記法と位置づけ

単磁極の強さを g とし、球面上の極座標を (θ, φ) とする。ベクトルポテンシャルは 1-形式として、場の強さはその外微分 $F = dA$ として扱う。

論文138 が置いたもの： $\nabla \cdot \omega = 0$ （渦度）は恒等式、 $\nabla \cdot B = 0$ は法則であり、分離子は「その場が回転であることに失敗しうるか」である。

本稿が加えるもの：その「失敗」の名前と住所。

2. ディラックの弦は、書き方の跡である

検算 2.1（二枚の潜在的表示）：

$$A_N = g(1 - \cos \theta) d\varphi, \quad A_S = -g(1 + \cos \theta) d\varphi$$

について、本稿では

	$\theta = 0$ （北極）	$\theta = \pi$ （南極）
A_N	0	$2g$
A_S	$-2g$	0

を得た。 $d\varphi$ が定義されない極で、対応する係数がちょうどゼロになる。ゆえに A_N は南極を除いて、 A_S は北極を除いて滑らかである。（証明終）

検算 2.2（同じ場を与える）： $F = dA$ の成分は $\partial A_\varphi / \partial \theta$ であり、本稿の計算ではどちらも $g \sin \theta$ 、差はゼロである。（証明終）

観察 2.3 (弦の正体)

一枚のポテンシャルで球面全体を覆おうとすると、どこかに特異な線が残る——それがディラックの弦である。二枚に分ければ、弦はどこにも現れない (ウー=ヤン)。

弦は場の性質ではない。「一枚で書く」と決めたことの跡である。論文95の言い方をすれば、弦の位置は規約であり、そこに物理は無い。

3. 重なりでの差は、チェックの1-コチェインである

検算 3.1: 重なり (赤道帯) で

$$A_N - A_S = 2g d\varphi = d\chi, \quad \chi = 2g\varphi$$

である (本稿で確認)。(証明終)

観察 3.2 (これが束である)

χ は、二枚の被覆のただ一つの重なりに付いた資料である。これがチェックの1-コチェインであり、束はまさにこの資料のことである。

観察 3.3 (三重の重なりが無いこと)

二枚の被覆には三重の重なりが無いから、コサイクル条件は自動的に満たされる。ただし、二枚で足りる理由はそこではない (論文151)。二枚の被覆は、チェック・コホモロジーとしては球面について誤答を返す——広げた二つの半球の重なりは円環であって可縮でないから、この被覆は良くないのである。働いているのはクラッチングであり、可縮な二枚から作る束は、重なりの上の遷移関数のホモトピー類、すなわち $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ で分類される。二枚で足りるのは、その機械が重なりしか要らないからである。

4. 貼り合わせが閉じることが、量子化である

検算 4.1: 波動関数は $e^{iex/\hbar}$ で変換する。赤道を一周すると位相は

$$\frac{e}{\hbar} [\chi(\varphi + 2\pi) - \chi(\varphi)] = \frac{4\pi eg}{\hbar}$$

だけ変わる。一価であるためにはこれが 2π の整数倍でなければならない、

$$\frac{2eg}{\hbar} = n \in \mathbb{Z}, \quad \text{すなわち} \quad g = \frac{n\hbar}{2e}.$$

(証明終)

観察 4.2 (これが芯である)

電荷の量子化は、力学の帰結ではない。遷移関数が一周して閉じなければならない、という貼り合わせの条件である。

そして論文138 の分離子が、ここで数になる。「 $\mathbf{B}$ が回転であることに失敗しうる」とは、この整数が非ゼロでありうるということである。 $n = 0$ が、 $\mathbf{B}$ が大域的に回転である場合にほかならない。

5. 不変量は整数であって、 4π ではない

検算 5.1：球面上での場の積分は、本稿の計算で

$$\int_{S^2} F = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi g$$

である。(証明終)

観察 5.2 (この 4π の住所)

この 4π は $\text{Vol}(S^2)$ である——論文128 が三次元における方向の空間の体積として住所を書いたものと同じである。

検算 5.3 (不変量のほう)：チャーン数は

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \frac{e}{\hbar} F = \frac{2eg}{\hbar} = n$$

である。(証明終)

n	g ($\hbar/e$ 単位)	意味
0	0	自明な束 ($\mathbf{B}$ は大域的に回転)
1	$1/2$	単磁極
2	1	二重の単磁極

観察 5.4 (ここが論文128 の再演である)

4π は生成元の正規化であり、 n は類である。値としての 4π と、位相としての整数は、別の量である。論文128 は $\text{Vol}(S^2)$ と $2\pi\chi(S^2)$ を分けたが、ここでも同じ分離が要る—— 4π を見て位相を読んでではない。

6. 層の見方が入るのは、ここである

観察 6.1 (分類定理)

主 $U(1)$ 束の同型類は

$$H^1(M, \underline{U(1)}) \cong H^2(M, \mathbb{Z})$$

で分類される ($\underline{U(1)}$ は滑らかな $U(1)$ 値関数の層、同型は指数列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow U(1) \rightarrow 0$ から来る)。
 $M = S^2$ ではこれは $\mathbb{Z}$ であり、その元が上の n である。

観察 6.2 (層は何をしているか)

層は「局所の資料と、重なりでの一致」を記帳する装置である。そして内容は、貼り合わせの失敗を測るコホモロジーのほうにある。

観察 6.3 (韻と機械を分ける)

「球殻フラックスは層に似ている」と言うのは韻である (論文100)。機械になるのは「フラックスはド・ラーム類であり、その整数性はチェックの障害である」という言い方のほうである。前者は何も計算せず、後者は整数を出す。

観察 6.4 (体系の中の位置)

論文92 はストークスが共有された字母であると述べ、論文70 は指数定理の住所を書き、論文128 は χ への四つの道が別の許可証を要求すると書いた。いずれも「局所では自明、大域では自明でない」という一つの形である。本稿はその形に、最も小さい例で名前を付けた。

7. 結論

1. ディラックの弦は書き方の跡である (検算2.1・2.2)。 A_N は南極を除いて、 A_S は北極を除いて滑らかで、どちらも同じ $F = g \sin \theta$ を与える。二枚に分ければ弦は消える。
2. 重なりでの差はチェックの1-コチェインである (検算3.1)。 $A_N - A_S = 2g d\varphi$ 、 $\chi = 2g\varphi$ 。束とはこの資料のことである。
3. 貼り合わせが閉じることが量子化である (検算4.1)。一周の位相 $4\pi eg/\hbar$ が 2π の整数倍 $\Rightarrow 2eg/\hbar = n$ 。力学ではなく貼り合わせの条件である。
4. 論文138 の分離子が数になる (観察4.2)。 $n = 0$ が「 B が大域的に回転である」場合である。
5. 不変量は整数であって 4π ではない (検算5.1・5.3)。 $\int F = 4\pi g$ の 4π は $\text{Vol}(S^2)$ 、チャーン数 n が類である (論文128)。
6. 層は記帳法、内容はコホモロジー (観察6.1・6.3)。 $H^1(M, \underline{U(1)}) \cong H^2(M, \mathbb{Z})$ 。韻ではなく機械のほうを引く。

結び：弦は場の中には無く、紙の上にあった。一枚で書こうとしたから、どこかを破らねばならなかったのである。二枚にすれば破れは消え、代わりに重なりへ一つの数が見れる——そしてその数が整数でなければならないことが、電荷の量子化であった。

改訂記録

第2版 (2026年8月)：結論は変更していない。論文151 の指摘により、観察3.3 の一行——「この問題が二枚で済むのは、そこまで単純だからである」——を書き直した。二枚の被覆は、チェック・コホモロジーとしては球面について誤答を返す (三頂点の単体的複体は全数列举して十八個あり、そのすべてで $H^2 = 0$ である。 S^2 の良い被覆には四枚が要る)。二枚で足りていたのはクラッチングという別の機械が働いていたからであり、不変量は重なりの上の巻き数である。主結果 $2eg/\hbar = n$ は撤回しない。直したのは理由の書き方だけである。

参考文献

1. Dirac, P. A. M. (1931). *Quantised singularities in the electromagnetic field*. Proceedings of the Royal Society A, 133.
2. Wu, T. T. & Yang, C. N. (1975). *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*. Physical Review D, 12.
3. Chern, S.-S. (1946). *Characteristic classes of Hermitian manifolds*. Annals of Mathematics, 47.
4. Grothendieck, A. (1957). *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Mathematical Journal, 9.
5. Bott, R. & Tu, L. W. (1982). *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer.
6. Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*, 2nd ed. Institute of Physics.
7. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
8. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
9. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチのオイラー標数的起源 [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
10. 山岸勇輝 (2026). 量子ビットとホップ写像 [論文68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238
11. 山岸勇輝 (2026). 指数定理の住所 [論文70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
12. 山岸勇輝 (2026). 共有された字母（カルタン） [論文92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
13. 山岸勇輝 (2026). ゲージ原理（ワイル） [論文96]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758671
14. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
15. 山岸勇輝 (2026). 二つのネーター [論文107]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837205
16. 山岸勇輝 (2026). 光は共形構造までしか決めない [論文111]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21961685
17. 山岸勇輝 (2026). $4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである [論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576
18. 山岸勇輝 (2026). 渦線が終われないのは、法則ではなく恒等式である [論文130]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079996
19. 山岸勇輝 (2026). どこまでがハミルトニアンかは、規約である [論文138]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081512
20. 山岸勇輝 (2026). 動かすと、 2π だけが残る [論文142]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082281
21. 山岸勇輝 (2026). 圧力も引く。だから上限がある [論文145]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082693
22. 山岸勇輝 (2026). 二枚の被覆は、円周について間違った答を返す [論文151]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084096

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)