

$\epsilon^2 = 0$ は環の定義であり、 $(dW)^2 = dt$ は道の事実である

— 「点」の点呼：閉点・生成点・幾何的點・肥った点 — [論文148]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

グロタンディークの移り方の一つは、「点」を対象の中の要素ではなく試験対象からの射として読み直したことであった。本稿はその「点」を点呼し、体系がすでに持っている区別と突き合わせる。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、点の個数は、体を言わないと決まらない。 $x^2 + 1$ が $\mathbb{F}_p[x]$ に切り出す閉点は、 p によって一個にも二個にもなるが、次数の総和は常に 2 である（本稿で $p \leq 29$ について計算）。個数は体に依り、総次数は依らない（第2節）。第二に、零集合が同じでも環は違う。 $V(x)$ と $V(x^2)$ は同じ点集合を持ち、環の長さは 1 と 2 である。重複度は点の個数ではなく環の長さである——冪零元を捨てるとベズーの 2 には住む場所がない（第3節）。第三に、肥った点は接ベクトルであり、特異点を見る。 $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ からの射を数え、滑らかな点では条件が一本残って次元 1、結節点と尖点では条件が消えて次元 2 になる（本稿で計算）。曲線は一次元なのに、接空間が二次元である（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。 $\epsilon^2 = 0$ と $(dW)^2 = dt$ は別の根を持つ。前者は環の定義であって動かせない。後者は道についての事実であって、粗さを動かすと動く—— H を 0.2 から 0.8 まで動かすと二次和は 95.7 から 0.0092 まで動き、有限で非零なのは $H = 1/2$ だけである（本稿でコレスキーにより厳密生成、 n^{1-2H} と一致）（第5節）。第五に、伊藤の項は、双対数が捨てる項そのものである。 $d(W^2)$ を通常の連鎖律で書けば $2W dW$ 、真実は $2W dW + dt$ であり、差は T に収束する（本稿で $n = 10^7$ まで計算）。捨ててよいかどうかを決めるのは、環の定義ではなく道の粗さである（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。双対数の ϵ -点が接ベクトルであること、関手の点、冪零元と重複度、伊藤の補題と二次変分はいずれも標準的である。 $\epsilon^2 = 0$ と $(dW)^2 = dt$ の並置も、両方を知る者には周知の観察である。本稿が加えるのは、その二つのどちらが規約でどちらが事実かを書いたこと、分離子（道の粗さ）を挙げて数で示したこと、「点」という一語の五つの別根に住所を与えたことだけである。

1. 記法と位置づけ

可換環 R の素イデアル全体を $\text{Spec } R$ と書く。 k を体、 $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ を双対数環と書く。ブラウン運動を W 、フラクショナル・ブラウン運動のハースト指数を H と書く。

位置づけ：既存の事実を並べ、住所と型を書く。論文146・147 は障害の住所を扱った。本稿は「点」という語そのものを扱う——そして体系がすでに持っている「規約と事実」の区別（論文95）を、微分の二次の項に当てる。

2. 点の個数は、体を言わないと決まらない

検算 2.1： $x^2 + 1$ を $\mathbb{F}_p$ 上で因数分解すると

p	因数分解	閉点の個数	剰余次数	次数の総和
2	$(x + 1)^2$	1	1	2
3	$x^2 + 1$	1	2	2
5	$(x + 2)(x - 2)$	2	1, 1	2
7	$x^2 + 1$	1	2	2
11	$x^2 + 1$	1	2	2
13	$(x + 5)(x - 5)$	2	1, 1	2
17	$(x + 4)(x - 4)$	2	1, 1	2
19	$x^2 + 1$	1	2	2
23	$x^2 + 1$	1	2	2
29	$(x + 12)(x - 12)$	2	1, 1	2

(証明終)

観察 2.2

閉点の個数は $p \bmod 4$ で変わり、 $p = 2$ では一つの点が二重になる。だが次数の総和は常に 2 である。

観察 2.3 (「いくつあるか」は、体を言うまで答が無い)

剰余体が $\mathbb{F}_{p^2}$ である閉点は、 $\text{Spec } \mathbb{F}_p[x]$ の一点であり、幾何的点としては二点である。一つの語が二つの数を持っている (論文16 の等号と同じ型)。

3. 零集合が同じでも、環は違う

検算 3.1

イデアル	零集合	$\dim_k k[x]/(g)$
$V(x)$	$\{0\}$	1
$V(x^2)$	$\{0\}$	2
$V(x^3)$	$\{0\}$	3
$V(x(x-1))$	$\{0,1\}$	2
$V(x^2(x-1))$	$\{0,1\}$	3

(証明終)

観察 3.2

$V(x)$ と $V(x^2)$ は同じ点集合を持ち、環が違う。重複度は点の個数ではなく、環の長さである。

検算 3.3 (ベズーの最小の場合) : 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 0$ の交わりのイデアルは、本稿のグレブナー基底計算で (x^2, y) 、すなわち商環は $k[x]/(x^2)$ で長さ 2 である。(証明終)

観察 3.4

点の一つ、数えると二つ。冪零元を捨てれば、この 2 には住む場所がない。「集合として同じ」は「同じ対象」ではない (論文113 と同じ型——同じ極限に見えて、何を保つかが違う)。

4. 肥った点は接ベクトルであり、特異点を見る

検算 4.1 : $f(a_0 + a\varepsilon, b_0 + b\varepsilon) = 0$ を $\varepsilon^2 = 0$ のもとで解くと

曲線と点	(a, b) への条件	解の次元
円 $x^2 + y^2 - 1$ の $(1, 0)$ (滑らか)	$2a = 0$	1
円 $x^2 + y^2 - 1$ の $(0, 1)$ (滑らか)	$2b = 0$	1
放物線 $y - x^2$ の $(0, 0)$ (滑らか)	$b = 0$	1
結節三次 $y^2 - x^3 - x^2$ の $(0, 0)$ (結節点)	条件なし	2
尖点 $y^2 - x^3$ の $(0, 0)$ (尖点)	条件なし	2

(証明終)

観察 4.2

滑らかな点では線型条件が一本残り、接線が出る。結節点と尖点では条件が空になり、次元が 2 になる——曲線は一次元なのに、である。肥った点は特異点を見る。

観察 4.3 (これがグロタンディークの移り方である)

接ベクトルとは $\text{Spec } k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ からの射である。「点」が「試験対象からの射」になり、試験対象を変えると答が変わる——体を変えれば第2節、双対数にすれば第4節である。

5. $\varepsilon^2 = 0$ は定義であり、 $(dW)^2 = dt$ は事実である

検算 5.1 (双対数では二次が消える) : 本稿の環の演算で $(a + b\varepsilon)^2 = a^2 + 2ab\varepsilon$ 、 $(a + b\varepsilon)^3 = a^3 + 3a^2b\varepsilon$ 。さらに $f(a + b\varepsilon)$ の ε 部が $bf'(a)$ に一致することを、 $x^2, x^3, x^5 - 2x + 7, \sin x, e^x, \log x, 1/x$ の七つで確認した。
(証明終)

検算 5.2 (ブラウン運動では二次が残る) : $[0, 1]$ 上、乱数種を固定して

n	$\sum(\Delta W)^2$	$\sum \Delta W $	$\sum \Delta W ^3$
10^2	1.021429	7.70	1.845×10^{-1}
10^3	1.036893	25.89	5.304×10^{-2}
10^4	0.993513	79.76	1.569×10^{-2}
10^5	0.992003	251.59	4.982×10^{-3}
10^6	0.997711	796.87	1.591×10^{-3}
10^7	1.000184	2523.13	5.049×10^{-4}

（証明終） 二次和は $T = 1$ に行き、一次和は発散し、三次和は消える——有限なのは指数 **2** だけである。なめらかな道 $\boldsymbol{x}(t) = \sin 2\pi t$ では、同じ二次和が n に反比例して消える（ $n = 10^6$ で 1.974×10^{-5} ）。

検算 5.3（粗さを動かすと、数が動く）：フラクショナル・ブラウン運動を共分散からコレスキー分解で厳密に生成し、 $[0, 1]$ 上の二次和を測ると

H	$n = 256$	$n = 512$	$n = 1024$	$n = 2048$	理論値 n^{1-2H} ($n = 2048$)
0.20	27.80	40.53	63.08	95.74	97.01
0.30	9.11	11.66	15.76	20.75	21.11
0.40	2.98	3.35	3.94	4.49	4.59
0.50	0.9786	0.9643	0.9810	0.9665	1.0000
0.60	0.3215	0.2769	0.2433	0.2072	0.2176
0.70	0.1056	0.0789	0.0594	0.0440	0.0474
0.80	0.0342	0.0216	0.0137	0.0092	0.0103

（証明終） 有限で非零なのは $H = 1/2$ だけである（指数 $1 - 2H$ が零になる唯一の点）。

観察 5.4（これが本稿の芯である）

身分		何を動かせば動くか
$\epsilon^2 = 0$	環の定義	動かさない（そう定義した）
$(dW)^2 = dt$	道についての事実	粗さ H （検算5.3）

二つは「二次で止める」という同じ形をしていて、同じ言明ではない。片方は二次を捨て、片方は二次を残して一次に格下げする。規約と事実の分離（論文95）が、微分の二次の項に当たっている。

6. 伊藤の項は、双対数が捨てる項そのものである

検算 6.1： $d(W^2)$ を通常の連鎖律（＝双対数の演算）で書けば $2W dW$ 、真実は $2W dW + dt$ である。左端和と厳密値を比べると

n	$\sum 2W \Delta W$	$W_T^2 - W_0^2$	差
10^3	−0.537675	0.382784	0.920459
10^4	2.875101	3.855534	0.980432
10^5	1.519519	2.520261	1.000742
10^6	−0.998739	0.000234	0.998973
10^7	2.035159	3.034543	0.999384

（証明終） 差は $T = 1$ であり、それは検算5.2 の $\sum(\Delta W)^2$ にほかならない。

観察 6.2

伊藤の補正項は、双対数が捨てる項そのものである。そして捨ててよいかどうかを決めるのは、環の定義ではなく道の粗さである。論文132 は伊藤の 2 が次元でなく粗さ $1/H$ であるとした——ここではその 2 が、代数の側の 2 ($\epsilon^2 = 0$) と並べられ、動くか動かないかで分けられている。

7. 点呼

観察 7.1

名	何であるか	何を分けるか
位相空間の点	素イデアル	—
閉点	極大イデアル	剰余体（第2節）
生成点	イデアル (0)	関数体
幾何的 point	代数閉体からの射	個数（第2節）
肥った点	$k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ からの射	特異性（第4節）

観察 7.2

一つの語が五つの別のものを指しており、それらを分けているのは空間ではなく、どの試験対象から射を入れるかである。

観察 7.3（論文147 との続き）

論文147 では分離子が係数であった。ここでは試験対象である。どちらも「同じ言語で書けること」が「同じ根を持つこと」ではない、という同じ形をしている。

8. 結論

1. 点の個数は体を言わないと決まらない（検算2.1）。個数は **1** にも **2** にもなり、次数の総和は常に **2** である。
2. 零集合が同じでも環は違う（検算3.1）。重複度は環の長さであり、冪零元を捨てればベズーの **2** に住む場所がない（検算3.3）。
3. 肥った点は接ベクトルであり、特異点を見る（検算4.1）。結節点と尖点では接空間が二次元になる。

4. $\epsilon^2 = 0$ は環の定義であり、 $(dW)^2 = dt$ は道の事実である（観察5.4）。後者だけが動く——有限で非零なのは $H = 1/2$ だけ（検算5.3）。
5. 伊藤の項は双対数が捨てる項そのものである（検算6.1）。差は T に収束する。
6. 「点」は五つの別根を持つ（観察7.1）。分離子は試験対象である。

結び：同じ「二次で止める」に見えるものが、二つあった。一方は環をそう定義したのであり、動かせない。他方は道がそうなのであって、粗さを動かせば動く。規約は動かせないから安全なのではなく、動かないことが規約である証拠なのである。

参考文献

1. Grothendieck, A. & Dieudonné, J. (1960–1967). *Éléments de géométrie algébrique*. Publications Mathématiques de l'IHÉS.
2. Grothendieck, A. (1971). *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Springer.
3. Mumford, D. (1988). *The Red Book of Varieties and Schemes*. Springer.
4. Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry*. Springer.
5. Eisenbud, D. & Harris, J. (2000). *The Geometry of Schemes*. Springer.
6. Itô, K. (1944). *Stochastic integral*. Proceedings of the Imperial Academy, 20.
7. Mandelbrot, B. B. & Van Ness, J. W. (1968). *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*. SIAM Review, 10.
8. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
9. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
10. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
11. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
12. 山岸勇輝 (2026). モジュールは極限である [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
13. 山岸勇輝 (2026). 尺度不変性は四つの別根を持つ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
14. 山岸勇輝 (2026). 伊藤の $\mathbf{2}$ は次元ではない [論文132]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080358
15. 山岸勇輝 (2026). KL は距離ではない [論文137]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081369
16. 山岸勇輝 (2026). ディラックの弦は、一枚の紙で書こうとした跡である [論文146]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082868
17. 山岸勇輝 (2026). 同じ H^2 でも、係数が違えば量子化しない [論文147]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083144

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)