

分母を決めるのは行列式ではなく、最大不変因子である

— 引き戻せるものと押し出せるもの：関手性と、体系の $|\det|$ の住所 — [論文149]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

本稿は体系自身にブレーキを当てる。論文39は $(\hbar, G, c)$ の次元指数行列が $|\det| = 2$ をもつゆえにプランク単位系の指数が半整数になると書き、論文03は (ν, ϵ) が $|\det| = 4$ をもつゆえにコルモゴロフ尺度が $\frac{1}{4}$ 刻みになると書き、両者を「同じ定理」と呼んだ。その定理は上界の定理であって、等式の定理ではない。第一に、量を写像に沿って運ぶことは一つの操作ではない。微分形式はどんな滑らかな写像に沿っても引き戻るが、ベクトル場は運べない—— $f(x) = x^2$ では $y = 1$ の上に $+2$ と -2 の二つの答が届く（第2節）。第二に、形式と密度を分けるのは向きである。反転写像で形式は符号を変え、測度は変えない。前者は $\det$ を、後者は $|\det|$ を担う（第3節）。第三に、体系の $|\det|$ の住所は、指数空間の体積である。次元指数行列は格子の射であり、 $|\det|$ はその指数=基本領域の体積である（本稿で格子点を数えて確認）。絶対値が付くのは、体積が向きを持たないからであり、第3節の $|\det|$ と同じ根である（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。 $|\det|$ は分母の上界であって、分母ではない。反例： $\text{diag}(2, 2)$ は $|\det| = 4$ をもつが、逆行列の成分は半整数だけで、 $\frac{1}{4}$ は一つも現れない。実際に現れる分母は最大不変因子 d_n であり、 $d_n = |\det|$ となるのは余核が巡回のときに限る（第5節）。第五に、体系の二つの実例は、どちらも巡回であった。論文03の行列は不変因子 $(1, 4)$ 、論文39の行列は $(1, 1, 2)$ である（本稿で再計算）。したがって結論はどちらも正しい。正しくなかったのは理由のほうであり、一つ粗い不変量で語っていた（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。スミス標準形、格子の指数が行列式に等しいこと、引き戻しと押し出しの関手性はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、体系の $|\det|$ に「指数空間の体積」という住所を与えたこと、密度の $|\det|$ と同じ根であるとしたこと、「 $|\det|$ が分母を決める」を反例で止めたこと、体系の二つの実例を再計算して結論が生き残ることを確かめたことである。論文03・39の結論は撤回しない。理由の書き方を直すだけである。

1. 記法と位置づけ

滑らかな写像 f に沿う引き戻しを f^* 、押し出しを f_* と書く。整数行列 A の不変因子を $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n$ と書く（スミス標準形の対角成分）。

位置づけ：論文146・147 は障害の住所を、論文148 は「点」の別根を扱った。本稿は「向き」を扱う——そして体系が三本の論文で使ってきた記号 $|\det|$ に住所を与え、その使い方の一つ制限を加える。

2. 引き戻せるものと、押し出せるもの

検算 2.1（形式は引き戻る）： $f(x) = x^2$ に対し $f^*(dy) = 2x \, dx$ であり、これは全ての点で定義されている。（証明終）

検算 2.2（ベクトル場は運べない）：同じ f で ∂_x を押し出そうとすると $f_*(\partial_x) = 2x \, \partial_y$ であり

x	$y = f(x)$	$f_*(\partial_x)$
+1	1	$+2 \, \partial_y$
-1	1	$-2 \, \partial_y$

すなわち一つの点 $y = 1$ に、二つの異なるベクトルが届く。（証明終）

観察 2.3

形式は反変であり、どんな写像に沿っても引き戻る。ベクトル場は共変であり、微分同相を要する。向きの問題ですらなく、単射性の問題である。

検算 2.4（測度は押し出る）： $[0, 1]$ 上の一様測度を $f(x) = x^2$ で押し出すと、密度は $1/(2\sqrt{y})$ になる。 4×10^6 標本で

y	経験密度	$1/(2\sqrt{y})$	相対誤差
0.225	1.0527	1.0541	0.0014
0.375	0.8160	0.8165	0.0006
0.675	0.6081	0.6086	0.0008
0.975	0.5061	0.5064	0.0005

（証明終） 密度が拾うのは $1/|f'|$ であって $1/f'$ ではない。

3. 形式と密度を分けるのは、向きである

検算 3.1：反転 $T(x, y) = (y, x)$ は $\det T = -1$ をもつ。

運ぶもの	係数	符号
面積形式 $dx \wedge dy$	$\det T = -1$	変わる
面積測度	$ \det T = 1$	変わらない

検算 3.2： B を行 $(2, 1)$ 、 $(1, 3)$ の行列とすると $\det B = 5$ であり、単位正方形の像の面積を 4000×4000 の格子で測ると **5.000239** を得た。（証明終）

観察 3.3

一つの記号に二つの運搬則があり、分けているのは向きである。測度は正の量であって、向きを持たない。

4. 体系の $|\det|$ の住所は、指数空間の体積である

検算 4.1：論文03 の次元指数行列（行 $(2, 2)$ 、 $(-1, -3)$ ）が $\mathbb{Z}^2$ の中に張る部分格子の指数を、 121×121 の窓で数えると 14641 点中 3691 点、すなわち比は **0.2521**（境界の効果を含む）であり、 $1/|\det| = 0.25$ に一致する。（証明終）

観察 4.2

部分格子の指数は基本領域の体積であり、体積は向きを持たない。したがって体系の $|\det|$ の絶対値は、第3節の密度の $|\det|$ と同じ根を持つ——どちらも「体積は向きづけられない」である。これは体系では珍しく、別根でなく同根を確認する所見である（論文142と同じ型）。

観察 4.3（住所を最後まで書く）

ただしこの体積は、物理的な体積ではない。次元指数のなす格子——単位対数がつくる空間——における体積である。ここを書かなければ、 $|\det|$ が何かの物理量に見えてしまう（論文17）。

5. $|\det|$ は分母の上界であって、分母ではない

事実 5.1：整数行列 A について $A^{-1} = \text{adj}(A)/\det A$ であり $\text{adj}(A)$ は整数行列であるから、 A^{-1} の成分の分母は $|\det A|$ を割り切る。これは上界であって、等式ではない。

反例 5.2： $A = \text{diag}(2, 2)$ は $|\det A| = 4$ をもつが $A^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ であり、 $\frac{1}{4}$ は一つも現れない。（証明終）

観察 5.3

したがって「 $|\det| = 4$ ゆえ4乗根が現れる」は、そのままでは成り立たない。反例は作り物ではない——面積 (L^2) と時間の二乗 (T^2) を基底に取れば、それがちょうど $\text{diag}(2, 2)$ である。どんな量を作るにも平方根までしか要らず、4乗根は決して現れない。

定理 5.4（実際に現れる分母）

A^{-1} の成分の分母の最小公倍数は、 A の最大不変因子 d_n に等しい。 $d_n = |\det A|$ となるのは、余核 $\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$ が巡回のときに限る。（スミス標準形の標準的な帰結。）

6. 体系の二つの実例は、どちらも巡回であった

検算 6.1：本稿で不変因子を計算すると

行列	$ \det $	不変因子	d_n	A^{-1} の分母
反例 $\text{diag}(2, 2)$	4	2, 2	2	2
論文03 (ν, ε)	4	1, 4	4	4
論文39 $(\hbar, G, c)$	2	1, 1, 2	2	2
論文38 (G, m, c)	1	1, 1, 1	1	1

逆行列も明示すると、論文03 は行 $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ 、 $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ 、論文39 は行 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 、 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ 、 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ である。(証明終)

観察 6.2 (結論は生き残る)

論文03 の余核は $\mathbb{Z}/4$ であり、 $\frac{1}{4}$ は本当に現れる。論文39 の余核は $\mathbb{Z}/2$ であり、半整数は本当に現れる。どちらの結論も撤回しない。

観察 6.3 (直すのは理由である)

論文03 が「 $|\det| = 2$ なら平方根、 $|\det| = 4$ なら4乗根」と書いた形は、上界を等式として読んでいる。正しい書き方は「最大不変因子が 2 なら平方根、4 なら4乗根」であり、 $|\det|$ はそれを割り切る数にすぎない。二つの実例で一致したのは、余核が巡回だったからである。

観察 6.4 (体系の型)

初版が置いたブレーキを初版自身に当てていなかった——論文56–60 と同じ型である（論文17 の「住所を書け」を、体系自身の行列式に当てた場合）。

7. 点呼

観察 7.1

対象	向き	何を要するか	担う係数
関数	引き戻る	任意の写像	—
微分形式	引き戻る	任意の写像	det
ベクトル場	どちらでもない	微分同相	—
測度・密度	押し出る	任意の写像	 det
コホモロジー	引き戻る（反変）	任意の写像	論文147
ホモロジー	押し出る（共変）	任意の写像	対

観察 7.2

「写像に沿って量を運ぶ」は一つの操作ではない。向きは好みの問題ではなく、対象が何であるかによって強制されている。

観察 7.3（三本の続き）

論文147 の分離子は係数、論文148 の分離子は試験対象、本稿の分離子は向きである。いずれも「共通の言語で書ける」が「同じ根を持つ」ではない、という同じ形をしている。

8. 結論

1. 形式は引き戻り、ベクトル場は運べない（検算2.1・2.2）。 $y = 1$ に ± 2 の二つが届く。
2. 形式と密度を分けるのは向きである（検算3.1）。**det** と **|det|**。
3. 体系の **|det|** は指数空間の体積である（検算4.1）。絶対値の根は密度の **|det|** と同じ——体積は向きづけられない。
4. **|det|** は分母の上界であって分母ではない（反例5.2）。**diag(2, 2)** は **|det| = 4** で半整数しか出さない。決めるのは最大不変因子である（定理5.4）。
5. 体系の二つの実例はどちらも巡回であった（検算6.1）。論文03 は $\mathbb{Z}/4$ 、論文39 は $\mathbb{Z}/2$ 。結論は生き残り、直すのは理由である。
6. 運搬の向きは対象が強制する（観察7.1）。

結び：体系は「 $|\det|$ が累乗根の出所である」と三度書いた。数はどれも正しかった。だが正しい数を出した理由が、一つ粗い不変量だった。上界を等式として読むことは、たまたま等しいときには見つからない——見つけるには、等しくならない例を自分で作るしかない。

参考文献

1. Smith, H. J. S. (1861). *On systems of linear indeterminate equations and congruences*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 151.
2. Grothendieck, A. (1957). *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Mathematical Journal, 9.
3. Mac Lane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
4. Cohn, H. (1993). *A Classical Invitation to Algebraic Numbers and Class Fields*. Springer.
5. Bott, R. & Tu, L. W. (1982). *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer.
6. Lee, J. M. (2012). *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed. Springer.
7. 山岸勇輝 (2026). ナビエ＝ストークス方程式における無次元数とスケール [論文03] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404030
8. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
9. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
10. 山岸勇輝 (2026). 山岸・古典物理学全公式幾何解凍マスタ帳理論 [論文38] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430234
11. 山岸勇輝 (2026). 山岸・プランク長 $l_p = c^{-3/2}$ 幾何解凍理論 [論文39] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430490
12. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
13. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
14. 山岸勇輝 (2026). 動かすと、 2π だけが残る [論文142]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082281
15. 山岸勇輝 (2026). ディラックの弦は、一枚の紙で書こうとした跡である [論文146]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082868
16. 山岸勇輝 (2026). 同じ H^2 でも、係数が違えば量子化しない [論文147]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083144
17. 山岸勇輝 (2026). $\epsilon^2 = 0$ は環の定義であり、 $(dW)^2 = dt$ は道の事実である [論文148]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083237

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)