

同じ指標表を持ちながら、同型でない

— 「同じ」の四つの強さと、それを分ける不変量 — [論文152]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

体系は「同じ」という語を何度も使ってきた——同根（論文142）、同じ H^2 （論文147）、同じ被覆（論文151）。本稿はその語に四つの強さがあることを示し、いずれにも属さない例を一つ置く。新しい数学定理は主張しない。第一に、指標表が完全に一致しながら同型でない二つの群がある。 D_4 と Q_8 はどちらも位数 8、共役類は五つで大きさは $1, 1, 2, 2, 2$ 、既約指標は一次元四つと二次元一つ、二次元指標の値は $2, -2, 0, 0, 0$ で完全に一致する。それでも D_4 の位数 2 の元は五個、 Q_8 は一個であり、同型ではない（本稿ですべて計算）（第3節）。第二に、分離子はフロベニウス＝シュア指標である。 $\nu_2(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi(g^2)$ は D_4 で +1、 Q_8 で -1 を返す——指標表が見られない差を、この一つの数が見る（第4節）。第三に、その帰結として Q_8 の二次元表現に実形は無い。実の 2×2 で $A^2 = B^2 = -I$ を満たす対を 40万組取ると $|\text{tr}(AB)|$ の最小は 2.000003（理論下界 2）であり、 $AB = -BA$ に必要な 0 には決して届かない。複素では $\text{tr}(ij) = 0$ で届く（第5節）。第四に、同値は同型ではない。 $\mathbb{Z}$ と $M_2(\mathbb{Z})$ は同型でない（一方は可換、他方は非零冪零元をもつ）が加群圏は同値である。中心は保たれ、可換性は保たれない——だから可換環では森田同値は同型に潰れる（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。 D_4 と Q_8 の指標表が一致すること、フロベニウス＝シュア指標、森田同値、圏同値と圏同型の区別はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、体系が使ってきた「同じ」を四つの強さに並べたこと、どの強さにも属さない例（不変量が一致するのに同型でない）を最下段に置いたこと、分離子を一つの数として計算したことだけである。

1. 記法と位置づけ

D_4 を正方形の対称群、 Q_8 を四元数群とし、どちらも 2×2 行列で明示的に生成する。既約指標を χ 、フロベニウス＝シュア指標を ν_2 と書く。

位置づけ：論文149 は向き、論文150 は重み、論文151 は被覆の良さを分離子とした。本稿の分離子はフロベニウス＝シュア指標である——そして「同じ」という語そのものを点呼する。

2. 二つの群

検算 2.1： D_4 を $r = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ と $s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ で、 Q_8 を $i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ と $j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ で生成すると

群	位数	元の位数の分布	共役類の大きさ
D_4	8	1, 2, 2, 2, 2, 4, 4	1, 1, 2, 2, 2
Q_8	8	1, 2, 4, 4, 4, 4, 4	1, 1, 2, 2, 2

(証明終)

観察 2.2

共役類の個数も大きさも一致する。だが D_4 の位数 2 の元は五個、 Q_8 は一個である。同型写像は位数を保つから、二つは同型でない。

3. 指標表は完全に一致する

検算 3.1：どちらも交換子部分群の位数が 2、したがってアーベル化は位数 4 のクラインの四元群であり、一次元既約指標は四つである。 $4 \cdot 1 + d^2 = 8$ より残る既約指標の次数は $d = 2$ で、それは定義表現である。その指標値は本稿の計算で

群	単位元	中心の対合	残り三つの類
D_4	2	-2	0, 0, 0
Q_8	2	-2	0, 0, 0

(証明終)

観察 3.2

一次元指標はどちらもクラインの四元群の四つの指標であり、二次元指標も一致する。すなわち指標表は完全に同じである。

観察 3.3（これが要点である）

指標から作られるあらゆる量——次数、共役類の個数、群環の分解、表現の重複度——が一致する。それでも群は同型でない。「すべての不変量が一致する」は「同じ」の一番弱い読みではない（論文17のいう住所の問題）。

4. 分離子はフロベニウス＝シュア指標である

検算 4.1： $\nu_2(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2)$ を二次元指標について計算すると

群	$\nu_2(\chi_2)$	型
D_4	+1	実型
Q_8	-1	四元数型

（証明終）

観察 4.2

ν_2 は指標の値そのものからは作れない。 $g \mapsto g^2$ という群の演算を使うからである。指標表は類の上の関数であって、平方写像が類をどう動かすかを覚えていない。だから見えなかった差を、この一つの数が見る。

5. Q_8 の二次元表現に実形は無い

検算 5.1：実の 2×2 行列で $A^2 = -I$ となるものは、 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ かつ $a^2 + bc = -1$ に尽きる（本稿で確認）。この解集合から40万組を無作為に取り $|\text{tr}(AB)|$ の最小を測ると

実の対 (40万組) の $ \text{tr}(AB) $ の最小	2.000003
$AB = -BA$ が要求する値	0
複素での $\text{tr}(ij)$ (四元数行列)	0

(証明終)

観察 5.2 (理由)

跡が零の実 2×2 行列に $\langle M, M \rangle = \text{tr}(M^2)/2 = a^2 + bc$ を入れると符号数は $(2, 1)$ である。 $A^2 = -I$ は $\langle A, A \rangle = -1$ を、 $AB = -BA$ は $\langle A, B \rangle = 0$ を意味するから、負ノルムの直交する二本が要る——符号数 $(2, 1)$ には負の方向が一本しかないから、それは不可能である。ローレンツ型の逆コーシー＝シュワルツが $|\text{tr}(AB)| \geq 2$ を与え、数値の 2.000003 はその下界に触れている。

観察 5.3

Q_8 の二次元表現は四元数を要し、 D_4 のそれは実行列で足りる (第2節の生成元がすでに実である)。 ν_2 の符号は、この「どの体で書けるか」を数にしたものである。

6. 同型でないのに、加群圏は同値である

検算 6.1 : $M_2(\mathbb{Z})$ の中心を直接解くとスカラー行列に限られ、 $\mathbb{Z}$ と同型である。一方 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ は非零で $P^2 = 0$ であり、 $\mathbb{Z}$ にそのような元は無い。また $M_2(\mathbb{Z})$ は非可換である (本稿で確認)。(証明終)

観察 6.2

$\mathbb{Z}$ と $M_2(\mathbb{Z})$ は同型でない。しかし加群圏は同値である (森田)。保たれるもの : 中心、両側イデアルの束、 K 理論。保たれないもの : 可換性、環そのもの。

観察 6.3

中心が保たれるから、可換環どうしても森田同値は同型に潰れる。「どこまで潰れるか」は、対象が何であるかで変わる。

7. 同値は同型ではない

観察 7.1

有限次元ベクトル空間の圏は対象が真の類をなす。その骨格は次元ごとに一つ、可算個である。両者は同値だが同型ではない——圏同型は対象の間の全単射を要求するからである。

観察 7.2

同値は「対象の個数」を保たない。だから「同じ圏」と言うときは、同型か同値かを書かねばならない。

8. 「同じ」の点呼

観察 8.1

強さ	要求	例
等しい	同じ対象	論文16 の等号の六根
同型	可逆な写像	$\mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$
同値	同型を除いて可逆	$\mathbb{Z}$ と $M_2(\mathbb{Z})$ の加群圏
同根	出所が一つ	論文129 の二つの 4π
(どれでもない)	不変量が一致するだけ	D_4 と Q_8

観察 8.2

最下段が本稿の置いた例である。指標表という強い不変量が完全に一致しても、同型ではない。「不変量で区別できない」は四つのどれよりも弱い。

観察 8.3 (体系への適用)

論文142は「同根と同一は違う」と書いた。本稿はその下にもう一段あることを示す——同根ですらなく、ただ不変量が一致しているだけ、という段である。論文110が $\beta^g = \alpha' \text{Ric}$ を金、外科手術とくりこみの類似を韻と分けたのは、この階段を降りる作業であった。

9. 結論

1. D_4 と Q_8 は指標表が完全に一致し、同型でない (検算2.1・3.1)。位数 2 の元が五個と一個。
2. 分離子はフロベニウス=シュア指標である (検算4.1) : +1 と -1。指標表は平方写像を覚えていない。
3. Q_8 の二次元表現に実形は無い (検算5.1) : 40万組で $|\text{tr}(AB)|$ の最小は 2.000003、必要な値は 0。
4. 同型でないのに加群圏は同値である (検算6.1)。中心は保たれ、可換性は保たれない。
5. 同値は同型ではない (観察7.1)。対象の個数は保たれない。
6. 「同じ」には四つの強さがあり、その下にもう一段ある (観察8.1)。

結び：二つの群は、指標という最も強い道具で見て、まったく区別がつかなかった。区別したのは、平方写像を覚えている一つの数である。「同じに見える」は、どの道具で見たかを書かないかぎり何も言っていない——そして道具を一つ増やすと、同じものが二つに割れる。

参考文献

1. Frobenius, G. & Schur, I. (1906). *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen*. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
2. Morita, K. (1958). *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*. Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, 6.
3. Grothendieck, A. (1957). *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Mathematical Journal, 9.
4. Mac Lane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
5. Serre, J.-P. (1977). *Linear Representations of Finite Groups*. Springer.
6. Curtis, C. W. & Reiner, I. (1962). *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Interscience.
7. 山岸勇輝 (2026). 等号は六つの別根を持つ [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
8. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
9. 山岸勇輝 (2026). リッチ・フローはくりこみ群フローである [論文110]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837476
10. 山岸勇輝 (2026). 不確定性の一つの定理ではない [論文129]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079681

11. 山岸勇輝 (2026). 動かすと、 2π だけが残る [論文142]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082281
12. 山岸勇輝 (2026). 同じ H^2 でも、係数が違えば量子化しない [論文147]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083144
13. 山岸勇輝 (2026). 分母を決めるのは行列式ではなく、最大不変因子である [論文149]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083590
14. 山岸勇輝 (2026). 光が測れないのは、密度である [論文150]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083989
15. 山岸勇輝 (2026). 二枚の被覆は、円周について間違った答を返す [論文151]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084096

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)