

何を忘れたかは、写像を数えれば分かる

— 性質・構造・もの：忘却の三段と、右随伴が無いことの証拠 — [論文153]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

体系は何度も「落とす」ことをしてきた——共形類は計量から密度を落とし（論文150）、指標表は平方写像を落とす（論文152）。本稿は「落とす」に三つの段があることを示し、どの段かを写像の個数で判定する。新しい数学定理は主張しない。第一に、随伴とは数え上げである。自由群からの準同型は生成元の像の組にほかならないから、 $|\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(F(S), G)| = |G|^{|S|} = |\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(S, U(G))|$ である（ G が $\mathbb{Z}/6$ 、 S_3 、 D_4 、 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ の場合に確認）（第2節）。第二に、忘却には三段ある。性質を忘れる（充滿忠実）・構造を忘れる（忠実だが充滿でない）・ものを忘れる（忠実でない）。 $\mathbb{Z}/3$ から $\mathbb{Z}/3$ への準同型は **3** 本、写像は **27** 本——忠実だが充滿でない。そして $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ が届かない位数 **8** の群は、ちょうど D_4 と Q_8 である（論文152 の二つ）（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。右随伴が無いことは、余積を数えれば見える。 $\mathbb{Z}/3$ の $\mathbf{Ab}$ における余積は **9** 元、下にある集合の直和は **6** 元。 $\mathbb{Z}/2$ の $\mathbf{Grp}$ における余積は無限二面体群で、直和は **4** 元である。余積を保たないから、右随伴は存在しない（第4節）。第四に、両方の随伴をもつ忘却関手もある。 $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ は離散を左随伴、密着を右随伴にもつ（三点集合とシェルピンスキー空間で個数が一致することを確認）（第5節）。位相を忘れることは、群法則を忘れることより穏やかである。第五に、自由に付け足したものは、忘れたものと釣り合わない。 $\mathbb{Z}/2$ の下にある集合から自由群を作ると無限になる（長さ **3** 以下の既約語だけで **53** 個）。忘れて自由に建て直しても元には戻らない（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。随伴関手（カン）、自由構成、性質・構造・ものの区別、位数 **8** の群の分類はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、三段のどれであるかを写像の個数で判定してみせたこと、右随伴の不在を余積の大きさという一つの数で示したこと、論文150の「光は密度を忘れる」がどの段かを書いたことだけである。

1. 記法と位置づけ

忘却関手を U 、自由関手を F と書き、 $F \dashv U$ で随伴を表す。関手が充満忠実なら性質を、忠実だが充満でないなら構造を、忠実でないならものを忘れているという。

位置づけ：論文151 は被覆の良さ、論文152 は平方写像を覚えているか否かを分離子とした。本稿の分離子は写像の個数そのものである。

2. 随伴とは数え上げである

検算 2.1 : S を二元集合とすると

G	$ G $	$ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(S, U(G)) $	$ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(F(S), G) $
$\mathbb{Z}/6$	6	36	36
S_3	6	36	36
D_4	8	64	64
$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	4	16	16

(証明終)

観察 2.2

自由群からの準同型は、生成元の像の組にほかならない。随伴とは、この一致がすべての G について同時に、かつ自然に成り立つという主張である。

3. 忘却には三段ある

検算 3.1 (構造を忘れる) : $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ について

G, H	$ \text{Hom}_{\text{Grp}} $	$ \text{Hom}_{\text{Set}} $
$\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/3$	3	27
$\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/6$	2	1296
$\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/4$	2	16
$\mathbb{Z}/6, \mathbb{Z}/6$	6	46656

(証明終) 相異なる準同型は相異なる写像に移る (忠実) が、写像のほとんどは準同型でない (充満でない)。

検算 3.2 (ものを忘れる): 集合の対から第一成分を取る関手について

対象	対の射の個数	像の射の個数	忠実か
$(2, 2) \rightarrow (2, 2)$	16	4	いいえ
$(1, 3) \rightarrow (2, 2)$	16	2	いいえ
$(2, 1) \rightarrow (3, 1)$	9	9	はい

(証明終) 第二成分に二本以上の写像があると射が衝突する。忠実でないことが「ものを忘れた」の意味である。

検算 3.3 (性質を忘れる、そして失われた対象を数える): $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ は充満忠実である (アーベル群のあいだの群準同型は、そのままアーベル群の準同型である)。失われるのは射ではなくどの対象が現れるかである。位数 8 の標準的な五つを元の位数の重複集合で分けると

群	アーベルか	元の位数の重複集合
$\mathbb{Z}/8$	はい	1, 2, 4, 4, 8, 8, 8, 8
$\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$	はい	1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4
$(\mathbb{Z}/2)^3$	はい	1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
D_4	いいえ	1, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4
Q_8	いいえ	1, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4

五つの重複集合はどの二つも相異なる（本稿で確認）。（証明終）

観察 3.4

$\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ が届かない位数 8 の群は、ちょうど D_4 と Q_8 である——論文152 が「指標表では区別できなかった」と書いた、あの二つである。一つの関手が届かない場所と、一つの不変量が見られない差が、同じ二つを指している。

観察 3.5（判定規則）

段	判定	例
性質を忘れる	充満忠実	$\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$
構造を忘れる	忠実だが充満でない	$\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$
ものを忘れる	忠実でない	対から第一成分

4. 右随伴が無いことは、余積を数えれば見える

事実 4.1：右随伴をもつ関手は余極限を保つ。したがって余積を保たなければ、右随伴は存在しない。

検算 4.2

圏の中の余積の大きさ		下にある集合の直和
$\mathbb{Z}/2$ in $\mathbf{Ab}$	4	4
$\mathbb{Z}/3$ in $\mathbf{Ab}$	9	6
$\mathbb{Z}/4$ in $\mathbf{Ab}$	16	8
$\mathbb{Z}/2$ in $\mathbf{Grp}$	無限	4

（証明終） $\mathbb{Z}/2$ の $\mathbf{Ab}$ での一致は偶然であり、 $\mathbb{Z}/3$ で 9 と 6 に割れる。 $\mathbf{Grp}$ の場合は無限二面体群であり、 $a(x) = -x$ 、 $b(x) = 1 - x$ を整数の等長変換として実現すると a, b はともに位数 2、 ab は 3 を 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5 と送って位数が無限である（本稿で確認）。

観察 4.3

$\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$ も $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ も右随伴をもたない。左随伴（自由構成）はもつ。随伴は左右で対称ではない。

5. 両方の随伴をもつ忘却関手

検算 5.1：三点集合の離散位相は開集合を 8 個、密着位相は 2 個もつ。シェルピンスキー空間を相手にすると

	連続写像の個数	集合としての写像の個数
離散三点 $\rightarrow$ シェルピンスキー	8	8
シェルピンスキー $\rightarrow$ 密着三点	9	9

（証明終）

観察 5.2

離散は左随伴、密着は右随伴である。位相を忘れることは、群法則を忘れることより穏やかである——同じ「忘却関手」という語が、随伴の在り方まで含めて別のものを指している。

6. 自由に付け足したものは、忘れたものと釣り合わない

検算 6.1： $\mathbb{Z}/2$ の下にある集合は二元だから $F(U(\mathbb{Z}/2))$ は二文字の自由群であり、長さ **0, 1, 2, 3** の既約語はそれぞれ **1, 4, 12, 36** 個、合計 **53** 個ある（本稿で数え上げ）。（証明終）

観察 6.2

二文字の自由群は無限であり、 $\mathbb{Z}/2$ は二元である。余単位 $F(U(G)) \rightarrow G$ は全射だが核は無限である。忘れて自由に建て直しても、元には戻らない——随伴は同値ではなく、その隔たりが余単位である。

7. 体系への適用

観察 7.1

写像	忠実か	充満か	段
計量 $\mapsto$ その共形類	はい	いいえ	構造を忘れる（密度）
アーベル群 $\mapsto$ 群	はい	はい	性質を忘れる
対 $(X, Y) \mapsto X$	いいえ	—	ものを忘れる

観察 7.2

四次元で計量は 10 成分、共形類は 9 成分、落ちるのは 1 である。論文150 はその 1 が密度であると突き止めた。本稿の語彙でいえば、「光は密度を忘れる」は「構造を忘れる」段であり、 $10 - 9 = 1$ が忘れたものの大きさである。

観察 7.3

「落とす」「無視する」「近似する」を同じ語で呼んではならない。どれも関手だが、忘れてるのが性質か構造かもので、復元できるかどうかが変わる（論文17）。

8. 結論

- 随伴とは数え上げである（検算2.1）： $|G|^{|S|}$ が両辺に立つ。
- 忘却には三段ある（観察3.5）：性質・構造・もの、判定は充満性と忠実性である。
- $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ が届かない位数 8 の群は D_4 と Q_8 である（検算3.3）——論文152 の二つ。
- 右随伴の不在は余積の大きさで見える（検算4.2）：9 対 6、そして無限対 4。
- 両方の随伴をもつ忘却関手もある（検算5.1）：離散と密着。
- 忘れて建て直しても戻らない（検算6.1）：二文字の自由群は無限である。

結び：何を忘れたかは、対象を睨んでも分からない。写像を数えれば分かる。そして忘れたものが性質なら対象を選び直せばよく、構造なら外から持ち込むしかなく、ものなら区別そのものが消えている——同じ「落とす」という語が、取り返しのつく話と、つかない話を隠している。

参考文献

1. Kan, D. M. (1958). *Adjoint functors*. Transactions of the American Mathematical Society, 87.
 2. Grothendieck, A. (1957). *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Mathematical Journal, 9.
 3. Mac Lane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
 4. Freyd, P. (1964). *Abelian Categories*. Harper & Row.
 5. Baez, J. C. & Dolan, J. (1998). *Categorification*. In: Higher Category Theory, Contemporary Mathematics 230, American Mathematical Society.
 6. Baez, J. C. & Shulman, M. (2010). *Lectures on n-categories and cohomology*. In: Towards Higher Categories, Springer. arXiv:math/0608420.
 7. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
 8. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
 9. 山岸勇輝 (2026). $\epsilon^2 = 0$ は環の定義であり、 $(dW)^2 = dt$ は道の事実である [論文148]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083237
 10. 山岸勇輝 (2026). 分母を決めるのは行列式ではなく、最大不変因子である [論文149]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083590
 11. 山岸勇輝 (2026). 光が測れないのは、密度である [論文150]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083989
 12. 山岸勇輝 (2026). 二枚の被覆は、円周について間違った答を返す [論文151]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084096
 13. 山岸勇輝 (2026). 同じ指標表を持ちながら、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)