

順序を書かない極限は、量ではない

— 極限と余極限が交換しない場合の点呼と、「特異極限」の住所 — [論文154]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文113 は「モジュールは壁ではなく極限である」と書き、論文03 は $\nu \rightarrow 0$ を特異極限と呼んで「収縮しない境界」を枠に加えた。本稿はその「特異」に住所を与える——二つの極限が交換しないということである。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、最小の例。 $a(n, m) = n/(n + m)$ は $\lim_n \lim_m = 0$ 、 $\lim_m \lim_n = 1$ である（第2節）。第二に、最小の圏論的な例。 2×2 の一元集合の族で、先に和を取ってから交われば $\{a, b\}$ 、先に交わってから和を取れば空集合になる。和は余極限、交わりは極限であり、二つは交換しない（第3節）。第三に、族が有向なら交換する。増大列どうしでは両者が一致する（本稿で確認）。分離子は「極限か余極限か」ではなく、添字が有向かどうかである（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。キュリー=ワイス磁石を有限 N で厳密に（二項和と対数総和指数で）計算すると、 $\beta J = 2$ においてどの N でも $h = 0$ の磁化はびたり 0 である。ところが $h > 0$ を固定して N を上げると値は $m^* = 0.957504$ に登り、 $N = 10^4$ 、 $h = 10^{-3}$ で 0.957581 に達する。すなわち 0 と 0.957504——「相転移は熱力学極限でだけ起きる」とは、この二つの極限が交換しないという言明にほかならない（第5節）。第五に、左右は鏡像ではない。 $\mathbf{Ab}$ において余極限は完全だが逆極限は完全でない。 p 進整数は連続体濃度をもち整数は可算だから $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_p$ は全射でなく、その欠損が $\varprojlim^1$ である（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。極限どうし・余極限どうしが交換すること、フィルター余極限が有限極限と交換すること、 $\varprojlim^1$ 、キュリー=ワイス模型、相転移が熱力学極限に属することはいずれも標準的である。本稿が加えるのは、論文03 の「特異極限」に圏論の住所を与えたこと、交換の可否を最小の例と数で並べたこと、分離子が「有向かどうか」であるとしたことだけである。

1. 記法と位置づけ

極限を $\varprojlim$ 、余極限を $\varinjlim$ と書く。集合の族について、和が余極限、交わりが極限である。

位置づけ：論文152 は平方写像、論文153 は写像の個数を分離子とした。本稿の分離子は添字の有向性である——そして体系がすでに「特異」と呼んでいたものを、その言葉で書き直す。

2. 最小の例

検算 2.1 : $a(n, m) = n/(n + m)$ について

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a$	0
$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a$	1

(証明終)

観察 2.2

難しいことは何も起きていない。要点は、順序が言明の一部だということである。

3. 最小の圏論的な例

検算 3.1 : $S_{11} = \{a\}$ 、 $S_{12} = \{b\}$ 、 $S_{21} = \{b\}$ 、 $S_{22} = \{a\}$ とすると

先に j で和を取り、次に i で交わる	$\{a, b\}$
先に i で交わり、次に j で和を取る	空集合

(証明終)

観察 3.2

和は余極限、交わりは極限である。二元集合が二つあれば、もう反例が作れる。「局所を集めてから制限する」と「制限してから集める」は、別の操作である。

4. 族が有向なら、交換する

検算 4.1 : $A_k = \{0, \dots, k\}$ 、 $B_k = \{3, \dots, 3 + k\}$ という増大列では

$(\bigcup_k A_k) \cap (\bigcup_k B_k)$	$\{3, 4, 5\}$
$\bigcup_k (A_k \cap B_k)$	$\{3, 4, 5\}$

(証明終) 一致する。

観察 4.2

分離子は「極限か余極限か」ではない。添字が有向（フィルター）であるかどうかである。フィルター余極限は有限極限と交換し、そうでなければ交換しない——第3節の反例は、添字が有向でないことだけを使っている。

5. キュリー＝ワイス磁石：0 と 0.957504

検算 5.1：ハミルトニアン $H = -\frac{J}{2N}(\sum_i s_i)^2 - h \sum_i s_i$ ($s_i = \pm 1$) を、二項和と対数総和指数で厳密に扱う。
 $\beta = 1$ 、 $J = 2$ （すなわち $\beta J = 2 > 1$ で転移点より下）とすると

N	$h = 0$	$h = 10^{-4}$	$h = 10^{-3}$	$h = 10^{-2}$	$h = 10^{-1}$
10	0.000000	0.000865	0.008650	0.086265	0.685493
10^2	0.000000	0.009133	0.091053	0.709827	0.964481
10^3	0.000000	0.091368	0.711411	0.958265	0.966083
10^4	0.000000	0.711563	0.957581	0.958466	0.966237

(証明終) 平均場方程式 $m = \tanh(\beta(Jm + h))$ の $h = 0$ における正の解は $m^* = 0.957504$ である（本稿で反復により算出）。

観察 5.2（表を二通りに読む）

順序	値	理由
N を上げてから $h \rightarrow 0$	0.957504	$h > 0$ の列が m^* へ登る
$h \rightarrow 0$ にしてから N を上げる	0	$s \mapsto -s$ の対称性でどの N でも 0

観察 5.3

有限の系には自発磁化が無い。どの N でも、外場を切れば磁化はぴたり 0 である——対称性が壊れていないからである。自発磁化は、極限を先にとったときにだけ現れる。

観察 5.4

「相転移は熱力学極限でだけ起きる」(ヤン＝リー) とは、この二つの極限が交換しないという言明にほかならない。物理の言葉と圏の言葉が、同じ一つのことを言っている。

6. 左右は鏡像ではない

検算 6.1 : $\mathbb{Z}/p \leftarrow \mathbb{Z}/p^2 \leftarrow \mathbb{Z}/p^3 \leftarrow \dots$ の各段の位数は $p, p^2, p^3, \dots$ と限りなく増える。その逆極限は p 進整数環であり連続体濃度をもつ。一方 $\mathbb{Z}$ は可算である。(証明終)

観察 6.2

したがって $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ は単射だが全射でない。完全列に逆極限を当てると右端で完全性が失われ、その欠損が導来関手 $\varprojlim^1$ である。

観察 6.3

$\mathbf{Ab}$ では余極限 (有向和) は完全で、逆極限は完全でない。極限と余極限は鏡像ではない——論文153 が「随伴は左右で対称ではない」と書いたことの、別の顔である。

7. 点呼

観察 7.1

組	何を要するか	証拠	交換するか
極限と極限	なし	—	する
余極限と余極限	なし	—	する
フィルター余極限と有限極限	添字が有向	検算4.1	する
一般の余極限と極限	—	検算3.1	しない
$N \rightarrow \infty$ と $h \rightarrow 0$	—	検算5.1	しない

観察 7.2（体系への適用）

論文03 は $\nu \rightarrow 0$ を「特異極限」と呼び、論文113 の枠に「収縮しない境界」を加えた。本稿の語彙では、それは「その極限が、いま行っている操作と交換しない」ということである。したがって $\nu \rightarrow 0$ について何かを言うときは、 $\nu \rightarrow 0$ と $t \rightarrow \infty$ のどちらを先に取ったかを書かねばならない。

観察 7.3

論文113 は「モジュールは壁ではなく極限である」と書いた。本稿が加えるのは、どの極限か、そして何に対してどの順序か、である（論文17）。

8. 結論

1. 最小の例で **0** と **1**（検算2.1）。順序は言明の一部である。
2. 最小の圏論的な例で $\{a, b\}$ と空集合（検算3.1）。和は余極限、交わりは極限。
3. 有向なら交換する（検算4.1）。分離子は「有向かどうか」である。
4. キュリー＝ワイス磁石で **0** と **0.957504**（検算5.1）。有限の系に自発磁化は無い。
5. 逆極限は完全でない（検算6.1）。極限と余極限は鏡像ではない。

6. 論文03の「特異極限」の住所は、交換しないことである（観察7.2）。

結び：極限をひとつ書いてだけでは、まだ量になっていない。何をどの順に取ったかまで書いて、はじめて数が決まる。有限の磁石には自発磁化が無く、無限にしてから外場を切ると現れる——現れたのは磁化ではなく、順序である。

参考文献

1. Grothendieck, A. (1957). *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Mathematical Journal, 9.
 2. Mac Lane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
 3. Milnor, J. (1962). *On axiomatic homology theory*. Pacific Journal of Mathematics, 12.
 4. Weiss, P. (1907). *L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique*. Journal de Physique Théorique et Appliquée, 6.
 5. Yang, C. N. & Lee, T. D. (1952). *Statistical theory of equations of state and phase transitions I*. Physical Review, 87.
 6. Ellis, R. S. (1985). *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. Springer.
 7. 山岸勇輝 (2026). ナビエ=ストークス方程式における無次元数とスケール[論文03] 第4版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404030
 8. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け[論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
 9. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼[論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
 10. 山岸勇輝 (2026). モジュールは壁ではなく極限である [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
 11. 山岸勇輝 (2026). 光が測れないのは、密度である [論文150]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083989
 12. 山岸勇輝 (2026). 二枚の被覆は、円周について間違った答を返す [論文151]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084096
 13. 山岸勇輝 (2026). 同じ指標表を持ちながら、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
 14. 山岸勇輝 (2026). 何を忘れたかは、写像を数えれば分かる [論文153]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084355
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)