

点がひとつも無い空間がある

— 開集合だけで語る：素性・二重否定・そして「点」の六つ目の根 — [論文155]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文148 は「点」に五つの別根を挙げ、分離子はどの試験対象から射を入れるかであると書いた。本稿は六つ目を置く——そしてその六つ目は、実例がひとつも無いことがありうる。新しい数学定理は主張しない。第一に、開集合の代数は排中律を満たさない。シェルピンスキー空間で $U = \{1\}$ とすると $\neg U = \emptyset$, $\neg\neg U = X$ であり U に戻らない（本稿で計算）。実数直線でも $U = (0, 1) \cup (1, 2)$ に対し $\neg\neg U = (0, 2)$ である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。点は開集合からは復元できない。二点の密着空間は点を2個もつが、その枠（開集合の代数）の点は1個しかない（枠から二元枠への準同型を全数列举して確認）。三点で二点を貼り合わせた空間も3に対し2である（第3節）。第三に、空間が素（sober）なら点は戻る。シェルピンスキー空間は2に対し2、二点・三点の離散空間も一致する。分離子は「空間か局所体か」ではなく、素であるかどうかである（第4節）。第四に、点がひとつも無い局所体がある。完備ブール代数の点は原子に対応する。単位区間の測度代数は無原子であり、二等分を続けると $1/2, 1/4, \dots, 1/1048576$ と正のまま小さくなって最小の非零元に達しない。したがって点はゼロ個である——それでも代数は非自明で、豊かな束と測度をもつ（第5節）。第五に、「点」の六つ目の根が置かれる。局所体の点とは二元枠への枠準同型である。そして論文148の五つと違い、これは存在しないことがありうる——空でない概型は必ず点をもつが、空でない局所体はもたないことがある（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。枠と局所体、素性、ハイティング代数、無原子完備ブール代数に点が無いこと（アイズベル、ジョンストン）はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、点の個数を有限の枠で全数列举して数として示したこと、分離子が素性であるとしたこと、論文148の点呼に「実例が無いことがありうる」段を加えたことだけである。空間が実在しないとも、点が虚構だとも主張しない。

1. 記法と位置づけ

位相空間の開集合全体を**枠**（完備ハイティング代数）と呼び、枠を反対向きに読んだものを**局所体**と呼ぶ。局所体の点とは、枠から二元枠 $\{0,1\}$ への枠準同型（底と頂を保ち、有限交わりと任意の和を保つ写像）である。

位置づけ：論文153 は写像の個数、論文154 は添字の有向性を分離子とした。本稿の分離子は素性である——そして論文148 の「点」の点呼を一段延ばす。

2. 開集合の代数は排中律を満たさない

検算 2.1：シェルピンスキー空間（開集合は $\emptyset$ 、 $\{1\}$ 、 X ）で

U	$\{1\}$
$\neg U$ （補集合の内部）	$\emptyset$
$\neg\neg U$	X
$\neg\neg U = U$ か	いいえ

（証明終）

観察 2.2

実数直線でも同じことが起きる。 $U = (0,1) \cup (1,2)$ の補集合の内部は $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$ 、その補集合の内部は $(0,2)$ であり、点 1 が戻ってくる。

観察 2.3

開集合の代数はハイティング代数であってブール代数ではない。「二重否定は恒等でない」——そしてその差が、いま消したはずの点である。

3. 点は、開集合からは復元できない

検算 3.1：有限の枠について、二元枠への枠準同型を全数列挙すると

空間	$ X $	開集合の個数	局所体の点	復元されるか
二点・密着	2	2	1	いいえ
二点・シェルピンスキー	2	3	2	はい
二点・離散	2	4	2	はい
三点・二点を貼り合わせ	3	3	2	いいえ
三点・離散	3	8	3	はい

(証明終)

観察 3.2

二点の密着空間の枠は二元枠であり、それは一点空間の枠にほかならない。したがって開集合をいくら眺めても、二点の密着空間と一点空間は区別できない。

観察 3.3

「空間とは点の集合に位相を入れたものである」は、ここですでに破れている。開集合が覚えているのは、位相的に区別できる点だけである。

4. 素なら、点は戻る

観察 4.1

検算3.1 の表で、シェルピンスキー空間と離散空間はいずれも $|X|$ をそのまま返した。有限空間は T_0 であることと素であることが同値であり、個数はそれに一致している。

観察 4.2

分離子は「空間か局所体か」ではない。素であるかどうかである。素性とは、点が復元できるための条件の名前である——そして実数直線もハウスドルフ空間も素であるから、日常の空間では何も失われな

い。

5. 点がひとつも無い局所体

事実 5.1：完備ブール代数の点（二元枠への枠準同型）は、その原子に一対一に対応する。

検算 5.2：単位区間の測度代数（ボレル集合を零集合で割ったもの）は無原子である。正の測度をもつ元は必ず正の測度をもつ真部分に割れるからで、二等分を繰り返すと

回数	残りの測度
1	1/2
3	1/8
10	1/1024
20	1/1048576

といつまでも正のままであり、最小の非零元に達しない。（証明終）

観察 5.3

原子が無いのだから、点はゼロ個である。それでもこの局所体は自明ではない——非可算個の元をもち、束としての構造をもち、その上に測度が乗っている。ただ、点と呼べるものが何も無いだけである。

観察 5.4

「点の空間」が空でありながら、空間そのものは空でない。これは病的な作り物ではなく、確率論が毎日使っている代数である。

6. 「点」の六つ目の根

観察 6.1

名	何であるか	出典
位相空間の点	素イデアル	論文148
閉点	極大イデアル	論文148
生成点	イデアル (0)	論文148
幾何的 point	代数閉体からの射	論文148
肥った点	$k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ からの射	論文148
局所体の点	二元枠への枠準同型	本稿

観察 6.2（六つ目だけが持つ性質）

空でない概型は必ず点をもつ（非零環には素イデアルがある）。ところが空でない局所体は、点をひとつも持たないことがある（検算5.2）。一語の六つの根のうち、実例が空になりうるのはこれだけである。

観察 6.3

論文148 は分離子が「どの試験対象から射を入れるか」だと書いた。ここでの試験対象は二元枠であり、空間によってはその射が一本も無い。「点」という語には、実例がゼロの場合がある。

7. 結論

1. 開集合の代数は排中律を満たさない（検算2.1）。二重否定は恒等ではない。
2. 点は開集合からは復元できない（検算3.1）。二点の密着空間は **2** に対し **1**。
3. 素なら戻る（観察4.1）。分離子は索性である。

4. 点がひとつも無い局所体がある（検算5.2）。無原子測度代数。
5. 「点」の六つ目の根が置かれる（観察6.1）。
6. 六つ目だけが、実例ゼロでありうる（観察6.2）。

結び：空間を点の集まりだと思ふのは、素な空間で育った習慣である。開集合だけを持って歩くと、点は復元できたりできなかったりし、まったく無いこともある——そのとき失われるものは何も無い。測ることも、包含を追うことも、和と交わりを取ることも、すべてできる。点は、空間の材料ではなく、空間から取り出せることもある結果であった。

参考文献

1. Stone, M. H. (1936). *The theory of representations for Boolean algebras*. Transactions of the American Mathematical Society, 40.
2. Artin, M., Grothendieck, A. & Verdier, J.-L. (1972). *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*. Springer.
3. Isbell, J. R. (1972). *Atomless parts of spaces*. Mathematica Scandinavica, 31.
4. Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press.
5. Johnstone, P. T. (1983). *The point of pointless topology*. Bulletin of the American Mathematical Society, 8.
6. Mac Lane, S. & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer.
7. 山岸勇輝 (2026). 別根と言うのは半分である——住所を書け [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
8. 山岸勇輝 (2026). 王道の点呼 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
9. 山岸勇輝 (2026). ディラックの弦は、一枚の紙で書こうとした跡である [論文146]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082868
10. 山岸勇輝 (2026). $\epsilon^2 = 0$ は環の定義であり、 $(dW)^2 = dt$ は道の事実である [論文148]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083237
11. 山岸勇輝 (2026). 二枚の被覆は、円周について間違った答を返す [論文151]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084096
12. 山岸勇輝 (2026). 何を忘れたかは、写像を数えれば分かる [論文153]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084355
13. 山岸勇輝 (2026). 順序を書かない極限は、量ではない [論文154]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084647

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)