

球殻の内部が平らなのは、平均値定理のせいではない

— 何が定数を強制しているか：調和性・球対称・原点での正則性 — [論文156]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「ニュートンの球殻定理の正体は、ガウスの平均値定理である」という説明が流通している。本稿はその説明に柵を立て、代わりに何が定数を強制しているのかを書く。新しい数学定理は主張しない。第一に、これが本稿の芯である。平均値定理は正しく、そして弱すぎる。 $\Phi = z$ は調和で、任意の半径の球面上の平均が 0、中心での値も 0 である——それでも Φ は内部で定数ではない ($\Phi(0,0,1) = 1$)。平均値の性質はすべての調和関数が持つのだから、それだけで「定数である」という結論に届くはずがない (第2節)。第二に、実際に効いているのは三つである：調和性、球対称、原点での正則性。 d 次元の球対称な調和関数を微分方程式から解くと $A + Br^{2-d}$ の二次元族であり ($d = 3, \dots, 6$ で確認)、原点での有界性が $B = 0$ を強制して、残るのが定数である (第3節)。第三に、直接計算でも確かめた。調和核 r^{2-d} を使うと、 $d = 3, 4, 5$ のいずれでも内部のぼらつきは 0.0、外部は点質量と一致した (最悪差 3.081×10^{-33}) (第4節)。第四に、分離子は指数である。 $d = 4$ で核を r^{-2} (調和) から r^{-1} (三次元から持ち込んだ「逆二乗」) に替えると、内部のぼらつきが 0.0 から 0.1146 に跳ね上がる——許可証は「2 という数」ではなく調和性である (第5節)。第五に、したがって論文51 の「 $n = 2$ 」と論文01 の「 $n = d - 1$ 」は、同じ許可証を二通りに述べたものである (第6節)。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。ガウスの平均値定理、最大値原理、球殻定理 (ニュートン 1687)、 d 次元ラプラス方程式の球対称解はいずれも標準的である。そして球殻定理そのものへの反論は一つもない——結論は無傷であり、直すのは理由の一行だけである。加えたのは「平均値定理が正体だ」という説明に反例で柵を立てたこと、強制している三条件を書き出したこと、誤った指数で内部が平らでなくなることを数で示したこと、論文51 と論文01 の二つの言明が同じ許可証であると橋を架けたことである。

1. 記法と位置づけ

Δ をラプラシアン、 d を空間次元とする。調和関数とは $\Delta\Phi = 0$ の解をいう。ガウスの平均値定理とは、調和関数の球面上の平均が中心での値に等しいという主張である。

位置づけ：論文51 は「集約を許可しているのは指数 $n = 2$ である」と特定し、論文124 はその許可の届く範囲を測って三つの別根に分けた。本稿はさらに一段下がり、その許可証が解析のどの定理なのかを書く。

2. 芯：平均値定理は正しく、そして弱すぎる

検算 2.1： $\Phi = z$ を取る。

$\Delta\Phi$	0（調和である）
半径 R の球面上の平均	0
中心での値	0
内部で定数か	いいえ（ $\Phi(0,0,1) = 1$ ）

（証明終）

観察 2.2

平均値の性質は、すべての調和関数が持っている。すべてが持つ性質は、そのうちの一つ（定数）を選び出せない。したがって「球殻定理の正体は平均値定理である」という説明は、証明しようとしている結論に届いていない。

観察 2.3

これは球殻定理が誤りだという意味ではない。定理は正しい。誤っているのは、その理由として差し出された一行だけである——体系がこれまで何度もやってきた形の訂正である（論文149・論文151：撤回ゼロ、直したのは理由）。

3. 何が定数を強制しているか

検算 3.1： d 次元の球対称な調和関数は $f'' + \frac{d-1}{r} f' = 0$ を満たす。解くと

d	球対称な調和関数
3	$C_1 + C_2/r$
4	$C_1 + C_2/r^2$
5	$C_1 + C_2/r^3$
6	$C_1 + C_2/r^4$

いずれも $A + Br^{2-d}$ の形である。(証明終)

観察 3.2

原点を含む領域で有界であることが $B = 0$ を強制し、残るのは定数である。これが球殻の内部が平らである理由であり、要る材料は三つ——調和性・球対称・原点での正則性。平均値定理はその中に無い。

観察 3.3

別の道もある。境界値が定数で、内部で調和なら、最大値原理により内部でも定数である。こちらは平均値定理の系を使うので「親戚」ではあるが、平均値定理そのものではない——効いているのは「最大も最小も内部で取れない」という一段強い主張のほうである。

4. 直接計算

検算 4.1：半径 1 の一様な球殻について、核 r^{2-d} で内部・外部の値を数値積分した。

d	内部 ($s = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$)	内部のばらつき	外部と点質量の最悪差
3	すべて 1.0	0.0	0.0
4	すべて 1.0	0.0	3.081×10^{-33}
5	すべて 1.0	0.0	0.0

(証明終)

観察 4.2

球殻定理は $d = 3$ に固有ではない。各次元の調和核を使うかぎり、どの次元でも成り立つ。

5. 分離子は指数である

検算 5.1 : $d = 4$ で核だけを替える。

核	内部の値 ($s = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$)	ばらつき
r^{-2} ($d = 4$ で調和)	1.0, 1.0, 1.0, 1.0	0.0
r^{-1} (三次元から持ち込んだ)	0.998748, 0.988620, 0.952703, 0.884177	0.1146

(証明終)

観察 5.2

指数を一つずらしただけで、内部は平らでなくなる。動かすべきものは指数であり、許可証は「2 という数」ではなく調和性である。

6. 「 $n = 2$ 」 と 「 $n = d - 1$ 」 は同じ許可証である

観察 6.1

d	力の指数	ポテンシャル	調和か
2	r^{-1}	$\log r$	はい
3	r^{-2}	r^{-1}	はい
4	r^{-3}	r^{-2}	はい
5	r^{-4}	r^{-3}	はい
6	r^{-5}	r^{-4}	はい

観察 6.2

論文51 は「許可を与えているのは指数 $n = 2$ である」と書き、論文01 は「働く指数は $n = d - 1$ である」と書いた。この表が示すのは、二つが同じ一つの許可証だということである——前者は $d = 3$ での言明、後者は全次元での言明。そして両者が本当に要求しているのは、指数そのものではなく、それが導く方程式 ($\Delta\Phi = 0$) である。

7. 点呼

観察 7.1

主張	立場
球殻の内部で力がゼロ	正しい（本稿でも $d = 3, 4, 5$ で確認）
外部は点質量に等しい	正しい（最悪差 10^{-33} ）
その理由は平均値定理である	弱すぎる（ $\Phi = z$ が反例）
その理由は調和性 + 球対称 + 正則性	これが要る三つ
許可証は「2」という数	ずれている（分離子は指数 = 調和性）

8. 結論

1. 平均値定理は弱すぎる（検算2.1）。 $\Phi = z$ が反例。
2. 要る材料は三つである（検算3.1・観察3.2）。 $A + Br^{2-d}$ から正則性が B を落とす。
3. 球殻定理は各次元の調和核で成り立つ（検算4.1）。内部のばらつき **0.0**。
4. 指数をずらすと内部は平らでなくなる（検算5.1）。ばらつき **0.1146**。
5. 「 $n = 2$ 」と「 $n = d - 1$ 」は同じ許可証である（観察6.2）。
6. 球殻定理そのものの反論は一つもない（観察2.3）。直したのは理由の一行。

結び：正しい定理に、正しくない理由がついていることがある。そのとき直すべきは定理ではなく、理由のほうである。そして理由を直すと、隣の部屋にあった二つの言明——「 $n = 2$ 」と「 $n = d - 1$ 」——が、同じ一枚の許可証だったことが見えてくる。

参考文献

1. Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Book I, Propositions 70–71.
 2. Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
 3. Kellogg, O. D. (1929). *Foundations of Potential Theory*. Springer.
 4. Axler, S., Bourdon, P., & Ramey, W. (2001). *Harmonic Function Theory*, 2nd ed. Springer.
 5. Gilbarg, D., & Trudinger, N. S. (2001). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer.
 6. 山岸勇輝 (2026). 球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
 7. 山岸勇輝 (2026). 山岸・重力多重極集約理論 [論文51] 第4版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602935
 8. 山岸勇輝 (2026). 曲率は内在的である [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
 9. 山岸勇輝 (2026). 集約の三つの別根 [論文124]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22057728
 10. 山岸勇輝 (2026). 渦線が終われないのは、法則ではなく恒等式である [論文130]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079996
 11. 山岸勇輝 (2026). 最大不変因子 [論文149]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083590
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)