

二乗の点呼

— 体系に現れる 2 は、何を動かせば動くか：次元・粗さ・仮定した誤差則、そして動かないもの —

[論文157]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

この体系は、あちこちで指数 **2** に出会ってきた。個々の **2** については書いてきたが、横断して点呼した稿がまだ無い。本稿はそれを、一つの試験——何を動かせばその **2** が動くか——で行う。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、逆二乗の **2** は $d-1$ である。 d 次元の球対称な調和関数を解くと、力の指数は $d=2, \dots, 6$ でそれぞれ **1, 2, 3, 4, 5** になる。次元を動かせば動く (第2節)。第二に、ボルンの **2** は次元では動かない。そして動かしているのはユニタリ性である。 $\sum_i |\psi_i|^p$ がユニタリ変換で保存されるのは $p=2$ のときだけである—— $p=1, 1.5, 2.5, 3, 4$ では変化が **0.18** から **0.67** に及ぶのに対し、 $p=2$ では 8.882×10^{-16} (本稿で計算)。ヒルベルト空間の次元を **2, 3, 5, 8, 13** と変えても 10^{-15} 台のまま動かない (第3節)。第三に、伊藤の **2** は道の粗さで動く。二次変分は n^{1-2H} で振る舞うはずであり、実際に測った傾きは $H = \mathbf{0.2, 0.35, 0.5, 0.65, 0.8}$ で **0.5965, 0.3028, 0.0046, -0.3081, -0.5917**——予測 $1-2H$ と **0.01** 以内で一致した (本稿で計算) (第4節)。第四に、これが本稿の新しい部分である。最小二乗の **2** は、仮定した誤差則そのものである。 $\sum |r_i|^p$ の最小化は密度 $\propto e^{-|r|^p}$ の最尤推定であり、勝つ指数は、データを生んだ法則の指数と一致する。ガウス誤差では $p=2$ (**0.1565** 対 **0.1983**)、ラプラス誤差では $p=1$ (**0.1782** 対 **0.2199**)、そしてコーシー誤差では $p=1$ が **0.2632**、 $p=2$ は **128.3741**——約 **500** 倍の差である (第5節)。第五に、クリフォードの **2** は動かせない。 $v^2 = Q(v)$ は代数の定義そのもので、動かすべき径数が存在しない (第6節)。一つの問いに、三つの答えと、二つの「該当なし」がある (第7節)。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。逆二乗則、ボルン則、伊藤の補題、最尤推定、クリフォード代数はいずれも標準的である。また本稿は、個々の **2** について体系が既にかいたことを撤回しない——論文53は「ボルンの指数 **2** は二つの別根から来る」と書き、論文132は「伊藤の **2** は次元ではない」と書いた。本稿が加えるのは、(i) 五つの **2** を一つの試験で横断点呼したこと、(ii) ユニタリ性が $p=2$ を一意に選ぶことを数で示したこと、(iii) 二次変分の傾きが $1-2H$ に一致することを測ったこと、(iv) 最小二乗の **2** が「仮定した誤差則」であると住所を書き、コーシー分布で **500** 倍の差として見せたことである。

1. 記法と位置づけ

本稿を通じて用いる試験は一つである：その **2** が動くには、何を動かさねばならないか。動かすべきものが見つかれば、その **2** の住所はそこにある。動かすべきものが無ければ、それは定義か、あるいは一意性定理が固定している。

位置づけ：論文86 は「必然性の四つの根」を、論文100 は王道の交差を点呼した。論文117 は一つの現象（スケール不変性）が四通りに指数を選ぶことを示した。本稿はその逆向きである——一つの数（**2**）が、いくつの別の場所から来ているかを数える。

2. 逆二乗の **2** は $d - 1$ である

検算 2.1： d 次元の球対称な調和関数は $f'' + \frac{d-1}{r} f' = 0$ を満たす。解いて力の指数を読むと

d	ポテンシャル	力	指数
2	$C_1 + C_2 \log r$	r^{-1}	1
3	$C_1 + C_2/r$	r^{-2}	2
4	$C_1 + C_2/r^2$	r^{-3}	3
5	$C_1 + C_2/r^3$	r^{-4}	4
6	$C_1 + C_2/r^4$	r^{-5}	5

（証明終）

観察 2.2

逆二乗の **2** は、 $d - 1$ を $d = 3$ で読んだ値である。動かすべきものは空間次元（論文01・論文156）。

3. ボルンの **2**：ユニタリ性が一意に選んでいる

検算 3.1： n 次元のユニタリ行列 U と単位ベクトル ψ を無作為に取り、 $\sum_i |\psi_i|^p$ が U で変わるかを見る（ $n = 6$ 、400 組の最悪値）。

p	$\sum \psi_i ^p$ の最大変化
1	6.698×10^{-1}
1.5	2.279×10^{-1}
2	8.882×10^{-16}
2.5	1.798×10^{-1}
3	4.248×10^{-1}
4	4.364×10^{-1}

(証明終)

検算 3.2 : $p = 2$ のまま次元を変える。

n	最大変化
2	9.992×10^{-16}
3	7.772×10^{-16}
5	8.882×10^{-16}
8	8.882×10^{-16}
13	7.772×10^{-16}

(証明終)

観察 3.3

保存されるのは $p = 2$ のときだけであり、それは次元に依らない。動かすべきものは空間次元ではなく、時間発展がユニタリであるという要求のほうである。

観察 3.4

本稿はこれをボルン則の導出とは呼ばない。導出はグリーソンの定理が与えており（論文71）、そこでの仮定は本稿の無作為試験より遥かに弱い。本稿が示したのは、「他の指数ではそもそも確率が保たれない」という、一段手前の事実だけである。

4. 伊藤の 2：動かすべきものは道の粗さである

検算 4.1：ハースト指数 H の非整数ブラウン運動を厳密に生成し、 $[0, 1]$ 上の二次変分を刻み幅を細かくしながら測る。理論では n^{1-2H} で振る舞う。

H	$\sum(\Delta X)^2$ ($n = 2^{10}, 2^{12}, 2^{14}, 2^{16}$)	傾き	$1 - 2H$	判定
0.2	64.700, 145.476, 334.388, 771.699	0.5965	0.60	発散
0.35	7.866, 12.208, 18.386, 27.804	0.3028	0.30	発散
0.5	0.979, 0.998, 0.988, 1.004	0.0046	0.00	有限で非零
0.65	0.129, 0.083, 0.055, 0.036	-0.3081	-0.30	消滅
0.8	0.015, 0.007, 0.003, 0.001	-0.5917	-0.60	消滅

(証明終)

観察 4.2

測った傾きは $1 - 2H$ と 0.01 以内で一致した。二次変分が有限かつ非零であるのは $H = 1/2$ のときだけである。動かすべきものは道の粗さであって、空間次元ではない（論文132）。

5. 芯：最小二乗の 2 は、仮定した誤差則である

事実 5.1： $\sum_i |r_i|^p$ の最小化は、密度が $\propto e^{-|r|^p}$ である誤差についての最尤推定と同じである。 $p = 2$ はガウス、 $p = 1$ はラプラスに対応する。したがって p はデータの性質ではなく、置いた仮定の名前である。

検算 5.2：真の位置を 3.0 とし、40 点の標本を 2000 回引いて、 $p = 1$ と $p = 2$ の推定量の二乗平均誤差を測る。

実際に引いた誤差	$p = 1$ の誤差	$p = 2$ の誤差	勝つ指数
ガウス e^{-r^2}	0.1983	0.1565	$p = 2$
ラプラス $e^{- r }$	0.1782	0.2199	$p = 1$
コーシー（裾が厚い）	0.2632	128.3741	$p = 1$

（証明終）

観察 5.3

勝つ指数は、データを生んだ法則の指数と一致する。最小二乗の **2** は「誤差」一般の性質ではなく、ガウスを仮定したという事実そのものである。

観察 5.4

コーシー誤差での差は約 **500** 倍である。これは精度の劣化ではなく、推定量が破綻しているということである——コーシー分布は分散を持たないので、二乗を最小にするという方針そのものが意味を失う。論文129 が「分散が発散すれば分散版の不確定性は何も言っていない」と書いたのと、同じ形の失敗である。

観察 5.5

したがって最小二乗の **2** は、逆二乗の **2** とも、ボルンの **2** とも、伊藤の **2** とも別根である。動かすべきものは、次元でも粗さでもなく、置いた確率分布である。

6. クリフォードの **2** は動かせない

検算 6.1：クリフォード代数の定義関係は $v^2 = Q(v)$ である。パウリ代数で確かめると

$\sigma_x^2 - I$	[0 0 ; 0 0]
$\sigma_y^2 - I$	[0 0 ; 0 0]
$\sigma_z^2 - I$	[0 0 ; 0 0]

(証明終)

観察 6.2

ここには動かすべき怪数が存在しない。**2**を替えても「別のクリフォード代数」にはならず、クリフォード代数でなくなるだけである（論文104・論文148の「 $\epsilon^2 = 0$ は環の定義」と同じ型）。

7. 点呼

観察 7.1

その 2	動かすと動くもの	一般形	住所
逆二乗の 2	空間次元 d	$d - 1$	調和性（01・156）
ボルンの 2	該当なし（ユニタリ性が固定）	2	53・68・71
伊藤の 2	道の粗さ H	$H = 1/2$ でのみ有限	132・148
最小二乗の 2	仮定した誤差則	$e^{- r ^p}$ の p	本稿
クリフォードの 2	該当なし（環の定義）	2	104・148
フーリエの 1/2	該当なし（極値の値）	1/2	129

観察 7.2

一つの問いに、三つの答えと、三つの「該当なし」がある。動かすべきものは、次元・粗さ・仮定した法則のいずれか、あるいはそもそも存在しない。

観察 7.3

「該当なし」の三つも、互いに同じではない。ボルンの **2** は一意性定理が固定し、クリフォードの **2** は定義が固定し、フーリエの $1/2$ は極値の値として出る。動かないという結果が同じでも、動かない理由は三つとも違う。

8. 結論

1. 逆二乗の **2** は $d-1$ である (検算2.1)。次元で動く。
2. $\sum |\psi|^p$ を保存するのは $p=2$ だけである (検算3.1)。 8.882×10^{-16} 対 10^{-1} 台。
3. その $p=2$ は次元に依らない (検算3.2)。 $n=2$ から 13 まで 10^{-15} 台。
4. 二次変分の傾きは $1-2H$ に一致する (検算4.1)。 $H=1/2$ でのみ有限。
5. 最小二乗の **2** は仮定した誤差則である (検算5.2)。コーシーでは **0.2632** 対 **128.3741**。
6. クリフォードの **2** は動かさない (検算6.1)。

結び：同じ形の指数が、これだけ違う場所から来ている。**2** を見たときに問うべきなのは「なぜ **2** なのか」ではなく、何を動かせばそれが **2** でなくなるのかである。その問いに答えが無いとき——そのときだけ、その **2** は動かないものとして書いてよい。

参考文献

1. Gauss, C. F. (1809). *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium*. Perthes und Besser.
2. Born, M. (1926). *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*. Zeitschrift für Physik, 37(12).
3. Gleason, A. M. (1957). *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space*. Journal of Mathematics and Mechanics, 6(6).
4. Itô, K. (1944). *Stochastic integral*. Proceedings of the Imperial Academy, 20(8).
5. Mandelbrot, B. B., & Van Ness, J. W. (1968). *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*. SIAM Review, 10(4).
6. Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*. Wiley.
7. Lounesto, P. (2001). *Clifford Algebras and Spinors*, 2nd ed. Cambridge University Press.
8. 山岸勇輝 (2026). 球対称密度分布における $n=2$ の唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
9. 山岸勇輝 (2026). 山岸・ボルン則幾何構造理論 [論文53] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603193
10. 山岸勇輝 (2026). Hopf 束としての量子ビット [論文68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238
11. 山岸勇輝 (2026). ボルン則の「2」と Gleason の定理 [論文71]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650577

12. 山岸勇輝 (2026). 必然性の四つの根 [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
13. 山岸勇輝 (2026). 計量を宿す代数 [論文104]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836876
14. 山岸勇輝 (2026). スケール不変性は、四通りに指数を選ぶ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
15. 山岸勇輝 (2026). $\hbar$ は、不等式の数学の側には無い [論文129]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079681
16. 山岸勇輝 (2026). 伊藤の $\mathbf{2}$ は、次元ではない [論文132]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080358
17. 山岸勇輝 (2026). $\epsilon^2 = \mathbf{0}$ は環の定義であり、 $(dW)^2 = dt$ は道の事実である [論文148]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083237
18. 山岸勇輝 (2026). 球殻の内部が平らなのは、平均値定理のせいではない [論文156]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091565

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)