

内から測れるものは、必ずどこかに住める

— ナッシュの埋め込み定理：ただし住所は、要求した滑らかさが選ぶ — [論文158]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文91 は曲率が内在的である——面の中にいるだけで測れる——と書いた。ナッシュ (1956) はその逆を言う：内在的に定義された計量は、必ずどこかのユークリッド空間に等長に住める。本稿はこの二つを対に置き、双対でありながら別根であることを示す。新しい数学定理は主張しない。第一に、驚異の定理を検算した。球面・トーラス・円柱について、第一基本形式だけから計算した曲率（ブリオスキの公式）と $\det(\mathbf{II})/\det(\mathbf{I})$ から計算した曲率が、三つとも差ちょうど 0 で一致した（本稿で記号計算）（第2節）。第二に、曲げると第二基本形式は動き、第一基本形式は動かない。平面と円柱は第一基本形式がともに $(a^2, 0, 1)$ で同一、第二基本形式は $(0, 0, 0)$ と $(-a, 0, 0)$ で別物、曲率はどちらも 0 （第3節）。第三に、住所は必ず在る。しかし必要な次元は、要求した滑らかさで動く。 n 次元多様体について、滑らかな埋め込み（ホイットニー）は $2n$ 、 C^1 等長（ナッシュ＝クイパー）は $n+1$ 、 C^k ($k \geq 3$) 等長（ナッシュ 1956・コンパクト）は $n(3n+11)/2$ —— $n=2$ ではそれぞれ 4 、 3 、 17 である（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。平坦トーラスは C^1 では住めて、 C^2 では住めない。 $\mathbb{R}^3$ のコンパクトな C^2 曲面は、原点から最も遠い点で必ず $K \geq 1/D^2 > 0$ を満たす。トーラスで四つの形について確かめるとすべて成立した。ゆえに至るところ $K=0$ の平坦トーラスは $\mathbb{R}^3$ に C^2 等長には入らない——それでもナッシュ＝クイパーは C^1 の住所を与える（第5節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。驚異の定理（ガウス 1828）、ホイットニーの埋め込み定理、ナッシュ＝クイパーの C^1 定理、ナッシュの C^k 定理はいずれも標準的である。加えたのは内在と外在を体系の別根の言葉で並べたこと、驚異の定理を三つの曲面で自前検算したこと、必要な次元を動かしているのが「要求した滑らかさ」と住所を書いたこと、平坦トーラスの C^1/C^2 の分岐を、コンパクト曲面の曲率の下界として数で示したことである。

1. 記法と位置づけ

曲面の第一基本形式を $\mathbf{I} = (E, F, G)$ 、第二基本形式を $\mathbf{II} = (L, M, N)$ と書く。 $\mathbf{I}$ は面の中で測れる量（長さ・角）だけから決まり、 $\mathbf{II}$ は周囲の空間への曲がり方を要する。

位置づけ：論文91 は「面の中にいるだけで曲率が測れる」という側を書いた。本稿はその反対側に立つ——「中で定義されたものは、外のどこかに実現される」。論文157 が一つの数の出所を数えたのに対し、本稿は一つの対象が持つ二つの記述を並べる。

2. 驚異の定理を検算する

検算 2.1：三つの曲面について、 $\mathbf{I}$ だけから求めた曲率（ブリオスキの公式）と $\det(\mathbf{II})/\det(\mathbf{I})$ を比べる。

曲面	$\mathbf{I}$ から	$\mathbf{II}/\mathbf{I}$ から	差
半径 a の球面	$1/a^2$	$1/a^2$	0
トーラス (R, r)	$\frac{\cos v}{r(R + r \cos v)}$	$\frac{\cos v}{r(R + r \cos v)}$	0
半径 a の円柱	0	0	0

（証明終）

観察 2.2

周囲の空間を一度も使わずに求めた曲率が、使って求めたものと一致する。これが驚異の定理であり、論文91 が「曲率は内在的である」と書いた中身である。

3. 曲げると第二基本形式は動き、第一基本形式は動かない

検算 3.1

曲面	$\mathbf{I}$	$\mathbf{II}$	K
平面 $\mathbf{x} = (au, v, 0)$	$(a^2, 0, 1)$	$(0, 0, 0)$	0
半径 a の円柱	$(a^2, 0, 1)$ （同一）	$(-a, 0, 0)$ （別物）	0

(証明終)

観察 3.2

第一基本形式は同じで、第二基本形式だけが動いた。紙を丸めても紙の上の距離は変わらない——等長だが合同ではない、という状態である。

観察 3.3

したがって Π は計量の関数ではない。同じ計量に、いくつもの Π が対応する。この一点が、本稿の残り全部を用意している。

4. 住所は必ず在る。しかし必要な次元は動く

事実 4.1 (ナッシュ 1956) : 任意のリーマン多様体は、十分高次元のユークリッド空間に等長に埋め込める。内在的に定義された計量には、必ず外在的な実現がある。

検算 4.2 : n 次元多様体について、要求ごとに必要な次元を並べる。

n	滑らかな埋め込み (ホイットニー) $2n$	C^1 等長 (ナッシュ=クイパー) $n+1$	C^k 等長 (ナッシュ) $n(3n+11)/2$
1	2	2	7
2	4	3	17
3	6	4	30
4	8	5	46
5	10	6	65

(証明終)

観察 4.3

三つの数は三つの別の問いへの答である。ホイットニーは計量を無視した埋め込み、ナッシュ=クイパーは C^1 の等長、ナッシュは C^k ($k \geq 3$) の等長。動かすべきものは、要求した滑らかさである。

観察 4.4

$n = 2$ で C^1 が 3、 C^k が 17 というのは、桁が違うのではない——問いが違う。「住める」という一語が、滑らかさを言わないかぎり次元を指定しない。

5. 芯：平坦トーラスは C^1 では住めて、 C^2 では住めない

検算 5.1：トーラス $(R, r) = (2, 1)$ の曲率 $K = \cos v / (r(R + r \cos v))$ は、管のまわりで符号を変える。

v	K	位置
0°	$1/3$	外側 (正)
60°	$1/5$	外側 (正)
90°	0	上下 (零)
120°	$-1/3$	内側 (負)
180°	-1	内側 (負)

全体で積分すると $\int K dA = 0$ であり、ガウス=ボンネの $2\pi\chi = 0$ と合う。(証明終)

事実 5.2 (障害)： $\mathbb{R}^3$ のコンパクトな C^2 曲面について、原点から最も遠い点を p 、その距離を D とすると、曲面は半径 D の球の内側にあるから、 p ではその球より曲がっていないなければならない： $K(p) \geq 1/D^2 > 0$ 。

検算 5.3

(R, r)	$D = R + r$	$v = 0$ での K	$1/D^2$	$K \geq 1/D^2$
(2, 1)	3	1/3	1/9	成立
(5, 1)	6	1/6	1/36	成立
(3, 2)	5	1/10	1/25	成立
(10, 1/2)	21/2	4/21	4/441	成立

(証明終)

観察 5.4

ゆえに至るところ $K = 0$ である平坦トーラスは、 $\mathbb{R}^3$ に C^2 等長には入れない。正の曲率を持つ点が必ず現れてしまうからである。

観察 5.5

ところがナッシュ＝クイパーの定理は、その平坦トーラスに $\mathbb{R}^3$ の C^1 等長埋め込みを与える（ボレリらは 2012 年にそれを明示的に構成し、描いてみせた）。二つは矛盾しない——別の問いに答えているからである。

観察 5.6

分離子は滑らかさである。 C^1 と C^2 のあいだに線が引かれており、そこで「住める／住めない」が入れ替わる。曲率という概念そのものが C^2 を必要とするので、 C^1 の世界では障害を述べることすらできない——障害が消えるのではなく、障害を書く言葉が無くなる。

6. 点呼

観察 6.1

量	住所	何が効くか
曲率 K	内在 (I だけ)	驚異の定理 (論文91)
第二基本形式 $\mathbf{II}$	外在 (周囲の空間が要る)	曲げると動く (第3節)
埋め込みの存在	外在・常に在る	ナッシュ 1956
必要な次元	要求した滑らかさで動く	$n+1$ か $n(3n+11)/2$ か
平坦トーラス	C^1 なら在る・ C^2 では無い	曲率の下界が障害

観察 6.2

内在と外在は双対である——内で定義したものには必ず外の実現がある。しかし別根でもある——その実現がどこに在るかは、計量からは決まらない。決めているのは、こちらが要求した滑らかさである。

観察 6.3

これは体系が繰り返し見てきた形である——「存在する」という言明と「どこに」という言明は、別の強さを持つ (論文113 が「存在までは言えるが値は測るしかない」と書いたのと同じ型)。

7. 結論

1. 曲率は I だけから出る (検算2.1)。三つの曲面で差ちょうど 0。
2. 曲げると $\mathbf{II}$ は動き、 I は動かない (検算3.1)。平面と円柱は I が同一。
3. 住所は必ず在る (事実4.1)。ナッシュ 1956。
4. 必要な次元は要求した滑らかさで動く (検算4.2)。 $n=2$ で 3 と 17。
5. コンパクト C^2 曲面には正曲率の点が必ずある (検算5.3)。四つの形すべてで成立。
6. 平坦トーラスは C^1 では住めて C^2 では住めない (観察5.4・5.5)。

結び：中で測れるものには、外の住所が必ずある。だがその住所は、中の情報だけでは決まらない。どこに住めるかを決めているのは、私たちが「どれくらい滑らかに住ませたいか」という要求のほうである——そして要求を一段ゆるめると、住めなかったはずのものが住みはじめる。

参考文献

1. Gauss, C. F. (1828). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores, 6.
2. Whitney, H. (1936). *Differentiable manifolds*. Annals of Mathematics, 37(3).
3. Nash, J. (1954). C^1 isometric imbeddings. Annals of Mathematics, 60(3).
4. Kuiper, N. H. (1955). On C^1 -isometric imbeddings I, II. Indagationes Mathematicae, 58.
5. Nash, J. (1956). *The imbedding problem for Riemannian manifolds*. Annals of Mathematics, 63(1).
6. Günther, M. (1989). Zum Einbettungssatz von J. Nash. Mathematische Nachrichten, 144.
7. Borrelli, V., Jabrane, S., Lazarus, F., & Thibert, B. (2012). *Flat tori in three-dimensional space and convex integration*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 109(19).
8. do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall.
9. 山岸勇輝 (2026). 曲率は内在的である [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
10. 山岸勇輝 (2026). 王道の交差 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
11. 山岸勇輝 (2026). 幾何を正準形へ流す [論文103]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836801
12. 山岸勇輝 (2026). 計量を宿す代数 [論文104]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836876
13. 山岸勇輝 (2026). 4次元だけの例外 [論文105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
14. 山岸勇輝 (2026). モジュールは壁ではなく、極限である [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
15. 山岸勇輝 (2026). 二乗の点呼 [論文157]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091931

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)