

# 「不動点」は一つの定理ではない

— ブラウワー・バナッハ・角谷・レフシェッツ、そして流れの不動点：何を要求し、何を与えるか —

[論文161]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

## 要旨

「不動点定理」という一語が、要求も結論も違う五つの主張を指している。本稿はそれを点呼し、それぞれが何を要求し何を与えるかを書く。新しい数学定理は主張しない。第一に、ブラウワーは存在しか与えない。 $f(x) = 1 - x$  は  $[0, 1]$  上で連続な自己写像だから仮定を完全に満たすのに、反復は  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0, 0.3 \rightarrow 0.7 \rightarrow 0.3, 0.9 \rightarrow 0.1 \rightarrow 0.9$  と振動して一度も収束しない（本稿で計算）。一意性も約束されない—— $f(x) = x$  は連続体、 $f(x) = x^2$  は二点、 $f(x) = 1 - x$  は一点（第2節）。第二に、バナッハは存在・一意・算法の三つを渡す。縮小率  $c$  に対し誤差比が  $c$  そのものに一致し（測定値  $0.1999999999, 0.5000000000, 0.8000000000, 0.9499999999$ ）、 $10^{-12}$  に届くまでの歩数は **18,41,132,598**。事前評価  $c^n/(1-c)$  は不等式ではなく等号で満たされる——この写像で評価は最良である（第3節）。第三に、これが本稿の芯であり、ブレーキである。レフシェッツ数が  $0$  のとき、何も言っていない。トーラス上で恒等写像は  $L = 0$  でありながら全点が不動、回転は  $L = 0$  で不動点一つも無い（それぞれ **200000** 点で確認）。 $L = 0$  は不動点の有無について情報を持たない（第4節）。第四に、角谷はブラウワーではない。マッチング・ベニーズの最適応答は、タイを一つに決めると  $401 \times 401$  の全数探索で不動点一つも無い。集合値にすると  $(1/2, 1/2)$  が入る——差は「集合値かどうか」ただ一つ（第5節）。第五に、体系自身が第五の意味を使っている—— $\beta = 0$  という流れの不動点（論文117・120）。写像が引数を返す点ではない（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。ブラウワー（1911）、レフシェッツ（1926）、バナッハ（1922）、角谷（1941）、およびナッシュ均衡の存在はいずれも標準的である。加えたのは五つを一つの表に点呼したこと、ブラウワーの仮定を満たしたまま反復が振動する例を出したこと、バナッハの事前評価が等号で満たされることを測ったこと、 $L = 0$  が「全点不動」と「不動点なし」の両方に起こることを同じ多様体の上で示したことである。

## 1. 記法と位置づけ

写像  $f$  の不動点とは  $f(x) = x$  を満たす点をいう。レフシェッツ数は  $L(f) = \sum_k (-1)^k \text{tr}(f_*|H_k)$  とする。

位置づけ：論文128 はポアンカレ＝ホップが片側しか与えないことを示した。本稿はその発見が孤立した事故ではないことを示す——不動点をめぐる定理には、片道のものと往復のものが混在している。

## 2. ブラウワーは存在しか与えない

検算 2.1：  $f(x) = 1 - x$  は  $[0, 1]$  上で連続な自己写像であり、ブラウワーの仮定を完全に満たす。不動点は  $x = 1/2$  ただ一つである。ところが反復は

| 出発点 | 反復                              |
|-----|---------------------------------|
| 0.0 | 0.000, 1.000, 0.000, 1.000, ... |
| 0.3 | 0.300, 0.700, 0.300, 0.700, ... |
| 0.9 | 0.900, 0.100, 0.900, 0.100, ... |

(証明終)

### 観察 2.2

仮定は一つ残らず満たされているのに、反復は振動する。ブラウワーが約束するのは存在だけであり、近づき方については何も言っていない。

検算 2.3：一意性も約束されない。

| 写像             | 不動点         |
|----------------|-------------|
| $f(x) = x$     | すべての点 (連続体) |
| $f(x) = x^2$   | 0 と 1 の二点   |
| $f(x) = 1 - x$ | 1/2 の一点     |

(証明終)

### 3. バナッハは存在・一意・算法の三つを渡す

検算 3.1 :  $x \mapsto cx + b$  ( $b = 1$ 、出発点  $0$ ) について、誤差比・収束の歩数・事前評価を測る。

| $c$  | 誤差比の測定値       | $10^{-12}$ までの歩数 | 事前評価 $c^n/(1 - c)$              |
|------|---------------|------------------|---------------------------------|
| 0.2  | 0.19999999999 | 18               | 等号 (相対差 $5.3 \times 10^{-10}$ ) |
| 0.5  | 0.50000000000 | 41               | 等号 (相対差 $0$ )                   |
| 0.8  | 0.80000000000 | 132              | 等号 (相対差 $2.0 \times 10^{-8}$ )  |
| 0.95 | 0.94999999990 | 598              | 等号 (相対差 $3.6 \times 10^{-7}$ )  |

残差は反復の丸め誤差である。(証明終)

#### 観察 3.2

誤差比は縮小率そのものであり、事前評価は不等式ではなく等号で満たされる——この写像について評価は最良である。バナッハは「在る」だけでなく「どう作るか」と「どれだけ待つか」まで渡す。

#### 観察 3.3

$c$  を  $1$  にすると、渡されたものが全部失われる。 $x \mapsto x + 1$  は  $\mathbb{R}$  上で不動点を持たない (完備だがコンパクトでない)。 $x \mapsto 1 - x$  は  $[0, 1]$  上で不動点を持つ (ブラウワー) が反復は収束しない (第2節)。二つの定理を分けているのは、 $c < 1$  という一つの不等式である。

### 4. 芯：レフシェッツ数が $0$ のとき、何も言っていない

検算 4.1

| 写像         | $L(f)$   | 不動点               |
|------------|----------|-------------------|
| 球面上の恒等写像   | <b>2</b> | すべての点             |
| 球面上の対蹠写像   | <b>0</b> | 一つも無い（200000点で確認） |
| トーラス上の恒等写像 | <b>0</b> | すべての点             |
| トーラス上の回転   | <b>0</b> | 一つも無い（200000点で確認） |

（証明終）

#### 観察 4.2

同じトーラス上で、 $L = 0$  が「全点不動」と「不動点なし」の両方に起きている。したがって  $L = 0$  という値は、不動点の有無について何一つ語っていない。

#### 観察 4.3

定理が言うのは「 $L \neq 0$  ならば不動点がある」という一方向だけである。論文128 がポアンカレ=ホップについて書いたのと、同じ形の片道性がここにもある——偶然ではなく、位相的な不変量が数えているのは符号付きの総和だからである。

#### 観察 4.4

球面と比べると差が見える。球面の恒等写像は  $L = 2 \neq 0$  なので定理が働くが、トーラスではオイラー標数が  $0$  なので恒等写像ですら定理の射程の外に落ちる。どの多様体に乗っているかで、同じ写像についての定理の効き方が変わる。

### 5. 角谷はブラウワーではない

構成 5.1：マッチング・ペニーズ。第一の打ち手が確率  $p$  で表、第二が  $q$  で表を出し、一致すれば第一の勝ちとする。

検算 5.2：最適応答のタイを一つに決めて関数にすると、跳びが生じる。反復すると

| 出発点          | 反復                                                                                                     |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (0.20, 0.20) | $(0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow \dots$ |
| (0.80, 0.30) | $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (0, 0) \rightarrow \dots$ |
| (0.51, 0.49) | $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (0, 0) \rightarrow \dots$ |

401 × 401 の格子で全数探索しても、不動点の一つも見つからない。(証明終)

検算 5.3 :  $q = 1/2$  では第一の打ち手の利得が  $p$  に依らない。

| $p$ | 0   | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1   |
|-----|-----|------|-----|------|-----|
| 利得  | 0.0 | 0.0  | 0.0 | 0.0  | 0.0 |

したがってすべての  $p$  が最適応答であり、集合値の最適応答は  $[0, 1]$ 、そこに  $1/2$  が含まれる。(証明終)

観察 5.4

関数にすると不動点が消え、対応（集合値写像）にすると現れる。ブラウワーと角谷を分けているのは、この一点だけである。ナッシュ均衡の存在がブラウワーではなく角谷に乗っているのは、そのためである。

観察 5.5

なおナッシュも一人二定理である——ここで使われる均衡の存在と、論文158 が扱った等長埋め込み定理は、まったく別の仕事である。体系はこの形をやまべ（論文23）、ホップ（論文125）、ネーター（論文107）でも見てきた。

## 6. 体系自身が使う第五の意味

### 観察 6.1

論文117 と論文120 は $\beta$  関数の零点を「不動点」と呼んでいる。これは写像が引数を返す点ではなく、流れが止まる点である。

### 観察 6.2

そこにはコンパクト性も縮小率もホモロジーも現れない。問われるのは線形化の固有値の符号であり、安定か不安定かである——五つ目の、そして別の使い方である。

## 7. 点呼

### 観察 7.1

| 定理     | 要求するもの        | 与えるもの     | 住所    | 年       |
|--------|---------------|-----------|-------|---------|
| ブラウワー  | 連続・凸コンパクト     | 存在のみ      | 位相    | 1911    |
| バナッハ   | 縮小率 $c < 1$   | 存在・一意・算法  | 解析    | 1922    |
| レフシェッツ | $L(f) \neq 0$ | 存在のみ（片道）  | 代数的位相 | 1926    |
| 角谷     | 凸値・上半連続の対応    | 存在のみ（集合値） | 凸解析   | 1941    |
| 流れの不動点 | $\beta = 0$   | 存在と安定性    | くりこみ群 | 117・120 |

### 観察 7.2

一語、五つの定理、そして約束しているものの種類すら同じではない。五つのうち算法まで渡すのは一つだけである。

## 8. 結論

---

1. ブラウワーの仮定を満たしても反復は振動する (検算2.1)。 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ 。
2. 一意性も約束されない (検算2.3)。連続体・二点・一点。
3. バナッハの誤差比は縮小率そのもの (検算3.1)。事前評価は等号で満たされる。
4.  $L = 0$  は何も語らない (検算4.1)。同じトラスで全点不動と不動点なしの両方。
5. 角谷とブラウワーの差は集合値かどうか (検算5.2・5.3)。全数探索で不動点ゼロ。
6. 体系自身が第五の意味を使っている (観察6.1)。流れの不動点。

結び：「不動点は存在する」と聞いたとき、次に問うべきは「どの定理で」である。存在だけを渡すものと、作り方まで渡すものと、そもそも何も語っていないものが、同じ名前で並んでいる。名前が同じであることは、約束が同じであることを意味しない。

## 参考文献

---

1. Brouwer, L. E. J. (1911). *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*. Mathematische Annalen, 71(1).
2. Banach, S. (1922). *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*. Fundamenta Mathematicae, 3.
3. Lefschetz, S. (1926). *Intersections and transformations of complexes and manifolds*. Transactions of the American Mathematical Society, 28(1).
4. Kakutani, S. (1941). *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*. Duke Mathematical Journal, 8(3).
5. Nash, J. (1950). *Equilibrium points in n-person games*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 36(1).
6. Granas, A., & Dugundji, J. (2003). *Fixed Point Theory*. Springer.
7. 山岸勇輝 (2026). 幾何を正準形へ流す [論文103]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836801
8. 山岸勇輝 (2026). 二つのネーター [論文107]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837205
9. 山岸勇輝 (2026). スケール不変性は、四通りに指数を選ぶ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
10. 山岸勇輝 (2026). 次元解析は、二通りに破れる [論文120]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22036433
11. 山岸勇輝 (2026). ホップは三人いる [論文125]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079384
12. 山岸勇輝 (2026).  $4\pi = 2\pi\chi$  が成り立つのは、三次元だけである [論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576
13. 山岸勇輝 (2026). 二乗の点呼 [論文157]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091931
14. 山岸勇輝 (2026). 内から測れるものは、必ずどこかに住める [論文158]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092143
15. 山岸勇輝 (2026). 「不適切」は一語ではない [論文159]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092229

---

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)