

全体のほうが、部分より知られていないことがある

— フォン・ノイマンのエントロピーは第三の住所である：条件付きエントロピーが負になるということ — [論文162]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文88は「エントロピー」という一語のもとに二つの別物——粗視化のものと地平線の面積のもの——がある
と書いた。本稿は第三の住所を加える：フォン・ノイマンのエントロピー $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ である。新しい
物理法則は主張しない。第一に、これはシャノンを「量子化」したものではない。量子状態には一つの確率分
布が付いていない——測定基底ごとに違う分布が出る。固有基底で測ったときのシャノン量が $S(\rho)$ に機械精度
で一致し（四例とも差0）、無作為な基底は上からしか近づかない（第2節）。第二に、ユニタリ発展では一切変
わらない。4000組の無作為な状態とユニタリで最大変化は 2.33×10^{-15} 。閉じた量子系では、これは時間の矢
になりえない（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。全体のほうが部分より小さいことがある。一重項で
は $S(AB) = 0$ なのに $S(A) = S(B) = \ln 2 = 0.6931471806$ 。古典では起こりえない—— 2×2 の同時分布を
200000個引いても $H(AB) - \max(H(A), H(B))$ は一度も負にならなかった（最小0.007226）（第4節）。第四
に、したがって条件付きエントロピーが負になる。一重項で $S(A|B) = -\ln 2$ 。同じ200000個の古典分布では
最小でも0.009555——符号の約束すら共有していない（第5節）。第五に、代わりに何が残るか。劣加法性と荒
木＝リープの三角不等式は20000個の無作為な状態で破れゼロであり、一重項はその境界にちょうど乗ってい
る（第6節）。

本稿の射程：新しい物理法則は主張しない。フォン・ノイマンのエントロピー、劣加法性、荒木＝リープの三角
不等式、条件付きエントロピーの負値はいずれも標準的である。また論文88の内容を撤回しない——二つのエン
トロピーの分離はそのまま、三つ目を足すだけである。加えたのは固有基底のシャノン量が $S(\rho)$ に一致するこ
とを測ったこと、ユニタリ不変性を数で確かめたこと、古典側の不等式が破れないことを200000個の標本で確
認して量子側の $-\ln 2$ と対置したこと、三つのエントロピーに「動かすと動くもの」を書いたことである。

1. 記法と位置づけ

密度行列 ρ に対し $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ とする（自然対数）。二体系では $S(AB)$ 、 $S(A) = S(\text{Tr}_B \rho)$ と書き、条件付きエントロピーを $S(A|B) = S(AB) - S(B)$ で定める。

位置づけ：論文88 は粗視化エントロピーと地平線の面積エントロピーを分離し、両者を結ぶのはホログラフィック上限だけだと書いた。論文77・78 は時間の矢が粗視化に宿ることを、論文138 はユニタリと散逸の分解が非一意であることを扱った。本稿はその三つの上に、第三のエントロピーを置く。

2. シャノンを「量子化」したものではない

観察 2.1

シャノンのエントロピーには確率分布が要る。ところが量子状態には、分布が一つ付いてはいない——どの基底で測るかによって、違う分布が出る。

検算 2.2：無作為な一量子ビットの混合状態について、20000 通りの基底で測った場合のシャノン量を集める。

例	$S(\rho)$	固有基底	20000 基底の最小	20000 基底の最大
1	0.1343031765	0.1343031765	0.1344243627	0.6931471786
2	0.1833896887	0.1833896887	0.1835099280	0.6931471806
3	0.6395323229	0.6395323229	0.6395323328	0.6931471799
4	0.3201588807	0.3201588807	0.3201815245	0.6931471803

固有基底での値と $S(\rho)$ の差は四例とも 0 であった。（証明終）

観察 2.3

$S(\rho)$ は「測ったときのシャノン量の最小値」である。どの基底で測っても、状態が実際に持っている以上の乱雑さが報告される——最小を与えるのは固有基底だけである。

観察 2.4

したがって出発点が違う。シャノン分布は分布を渡されて数を返し、フォン・ノイマンは状態を渡されて分布そのものを自分で選ぶ。同じ式の形をしていても、入力が違う。

3. ユニタリ発展では一切変わらない

検算 3.1：4 次元の無作為な密度行列と無作為なユニタリを 4000 組取り、 $|S(U\rho U^\dagger) - S(\rho)|$ の最大を測る。

最大変化	2.33×10^{-15}
------	------------------------

(証明終)

観察 3.2

閉じた量子系では厳密に保存される。ゆえにフォン・ノイマンのエントロピーは、それ自体では時間の矢になりえない——矢が要るのは非ユニタリな操作、すなわち部分トレース・測定・粗視化のほうである（論文77・78・88）。

4. 芯：全体のほうが部分より小さいことがある

検算 4.1：一重項状態について

$S(AB)$	0 (純粋状態)
$S(A)$	$0.6931471806 = \ln 2$
$S(B)$	0.6931471806

(証明終)

検算 4.2：古典側で同じことが起きるかを見る。 2×2 の同時分布を 200000 個無作為に引き、 $H(AB) - \max(H(A), H(B))$ の最小を測る。

最小値	0.007226
負になった回数	0 回

(証明終)

観察 4.3

古典では、全体を知ることが部分を知ることを含む。量子ではそうならない——二つを合わせた系については完全に知っていて、片方だけを見ると何も知らない、という状態が存在する。

観察 4.4

これは「量子のほうが乱雑だ」という話ではない。 $S(AB) = 0$ は乱雑さが皆無だということである。情報が部分にではなく相関の側に置かれている、というだけである。

5. 条件付きエントロピーが負になる

検算 5.1

一重項の $S(A B) = S(AB) - S(B)$	$0 - 0.6931471806 = -0.6931471806$
同じ 200000 個の古典分布での $H(A B)$ の最小	0.009555

(証明終)

観察 5.2

古典の条件付きエントロピーは下から 0 で抑えられ、量子のそれは $-\ln 2$ に届く。二つは符号の約束すら共有していない——同じ記号で書かれ、同じ名前と呼ばれているが、値域が違う。

観察 5.3

「負のエントロピー」は言葉の綾ではなく、操作的な意味を持つ（量子状態併合における「将来使える資源」として読める）。ただし本稿はその解釈には立ち入らない——書けるのは、値が負になるという事実と、その住所までである。

6. 代わりに何が残るか

検算 6.1：無作為な二量子ビット状態を 20000 個（階数も無作為に）取り、二つの不等式の破れを数える。

不等式	破れた回数
$S(AB) \leq S(A) + S(B)$ （劣加法性）	0
$ S(A) - S(B) \leq S(AB)$ （荒木＝リーブ）	0

一重項では $S(A) + S(B) = 1.386294$ に対し $S(AB) = 0$ 、 $|S(A) - S(B)| = 0$ に対し $S(AB) = 0$ である。（証明終）

観察 6.2

古典の不等式は弱められたのではなく、別の不等式に置き換わっている。 $H(AB) \geq \max(H(A), H(B))$ の場所に座っているのは荒木＝リーブの三角不等式であり、一重項はその境界にちょうど乗っている。

7. 点呼：三つのエントロピー

観察 7.1

エントロピー	住んでいる場所	動かすには	論文
粗視化（ギブズ）	観測者の解像度	粗視化を変える	77・78・88
地平線の面積	境界の面積・次元	面積を変える	73・88
フォン・ノイマン	密度行列のスペクトル	非ユニタリな操作	本稿

観察 7.2

一語の下に三つの量がある。一つ目は観測者に、二つ目は境界に、そして三つ目は状態そのものに住んでいる。三つのうち、時間の経過で変わらないのは三つ目だけである。

観察 7.3

絡み合いエントロピーが場の理論で面積則を示すことは知られており、三つ目と二つ目のあいだに韻がある。だが本稿はそれを同根とは書かない——片方は部分系の選び方で決まり、他方は幾何が決める。論文88が「結ぶのは上限だけ」と書いた線を、ここでも越えない。

8. 結論

1. 固有基底のシャノン量が $S(\rho)$ に一致する（検算2.2）。四例とも差 0。
2. ユニタリでは変わらない（検算3.1）。最大 2.33×10^{-15} 。
3. 一重項で $S(AB) = 0$ 、 $S(A) = \ln 2$ （検算4.1）。全体のほうが小さい。
4. 古典では 200000 個引いても一度も起きない（検算4.2）。最小 0.007226。
5. 条件付きエントロピーは $-\ln 2$ に届く（検算5.1）。古典は最小 0.009555。
6. 劣加法性と荒木＝リーブは破れゼロ（検算6.1）。一重項は境界の上。

結び：全体について完全に知っていながら、部分については何も知らない——そういう状態がある。古典の言葉では、この文は矛盾している。矛盾していないのは、情報が部分にではなく、部分と部分のあいだに置かれているからである。

参考文献

1. von Neumann, J. (1927). *Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
2. Shannon, C. E. (1948). *A mathematical theory of communication*. Bell System Technical Journal, 27.
3. Araki, H., & Lieb, E. H. (1970). *Entropy inequalities*. Communications in Mathematical Physics, 18(2).
4. Lieb, E. H., & Ruskai, M. B. (1973). *Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy*. Journal of Mathematical Physics, 14(12).
5. Horodecki, M., Oppenheim, J., & Winter, A. (2005). *Partial quantum information*. Nature, 436.
6. Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th anniversary ed. Cambridge University Press.
7. 山岸勇輝 (2026). ボルン則の「2」と Gleason の定理 [論文71]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650577
8. 山岸勇輝 (2026). リューヴィルの定理と時間の矢 [論文77]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21722473
9. 山岸勇輝 (2026). 摩擦と散逸は粗視化である [論文78]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21731937
10. 山岸勇輝 (2026). 二つのエントロピーを混同しない [論文88]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21747809
11. 山岸勇輝 (2026). どこまでがハミルトニアンかは、規約である [論文138]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081512
12. 山岸勇輝 (2026). 一つの不等式に、三つの天井がある [論文160]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092434
13. 山岸勇輝 (2026). 「不動点」は一つの定理ではない [論文161]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092530

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)