

定義は d を p で割り、定理は p を判別式で割る

— 平方剰余の相互法則：法は選ばれていない、そして 4 と 8 は同根である — [論文166]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

ルジャンドル記号 $(d|p)$ の定義は「 d を p で割った余りが平方数か」を問う。ところが相互法則の答は、 p を別の数で割った余りだけで決まる。本稿はその「別の数」を全数探索で測り、それが判別式であることを確かめ、二つの補充則の 4 と 8 が同根であることを示す。新しい数学定理は主張しない——ガウス以来の標準的内容である。第一に、法則そのものを定義から検算した。300 未満の奇素数の全対 1830 組で $(p|q)(q|p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ は破れゼロ、二つの補充則も破れゼロである（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。20000 未満の素数について、 $(d|p)$ が $p \bmod m$ だけで決まるような最小の m を全数探索で測った。十六個の d すべてで、最小の m はちょうど $|\text{disc}(d)|$ に一致した（第3節）。第三に、分離子は $d \bmod 4$ である。 $4|d|$ は常に周期だが、最小とは限らない—— $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき真の法はその四分の一である（ $d = 5$ で 20 ではなく 5、 $d = 13$ で 52 ではなく 13）。法は都合で選ばれた数ではなく、強制された数である（第4節）。第四に、第一補充則の 4 と第二補充則の 8 は、二つの理由ではなく一つである。どちらも $|\text{disc}|$ であり、 $d = -1$ で 4、 $d = 2$ で 8、 $d = -2$ で 8 になる（測定値）。本体系は根を分けることが多いが、ここでは分かれて見えていた二つを束ねる（第5節）。第五に、それでも法則は根を与えない。相互法則は $p = 10^9 + 7$ で 5 手で可否を答えるが、平方根そのものは 30 手を要し、しかもトネリ＝シャンクスは非剰余を一つ見つけるところから始まる。個数は定理が言い、一つを名指すのは探索である（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——平方剰余の相互法則、判別式が導手であること、ディリクレ指標としての定式化は、いずれも標準的である。また本稿は法則を証明しない——示すのは測定であって証明ではない。加えたのは最小の周期を全数探索で測り、判別式と一致することを確認したこと、 $4|d|$ が四倍過剰になる場合を分離子つきで示したこと、二つの補充則の 4 と 8 を同根と確認したことである。同根の確認は本体系では稀で、論文31・論文142 に次いで三度目にあたる。

1. 記法と位置づけ

奇素数 p と p で割れない整数 d に対し、ルジャンドル記号 $(d | p)$ を、 d が p を法として平方剰余なら $+1$ 、そうでなければ -1 と定める。平方因子を持たない d の判別式を、 $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき $\text{disc}(d) = d$ 、それ以外
のとき $\text{disc}(d) = 4d$ と書く。本稿の記号はすべてオイラーの規準 $(d | p) \equiv d^{(p-1)/2} \pmod{p}$ で計算した——相互法
則を一度も使わずに、である。

位置づけ：論文86 は量が「決まっている」ことの四つの根を点呼し、論文147 は 4π が次元ではなく周期である
と書いた。本稿の法もまた周期であり、そして選ばれていない。

2. 法則そのものを、定義から検算する

検算 2.1：300 未満のすべての奇素数の対について、記号をオイラーの規準で計算し、法則の両辺を比べた。

主張	調べた個数	破れ
$(p q)(q p) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$	1830 対	0
$(-1 p) = (-1)^{(p-1)/2}$	61 個	0
$(2 p) = (-1)^{(p^2-1)/8}$	61 個	0

(証明終)

観察 2.2

ここで、定義が何を見ているかに注意したい。 $(d | p)$ の定義は「 d を p で割った余り」を見る—— p を
何かで割る、という操作は定義のどこにも現れない。ところが上の右辺は、 p を 4 で割った余りと q を
4 で割った余りだけで書かれている。

3. 芯：最小の周期を測る

検算 3.1：平方因子を持たない各 d について、20000 未満の素数 p (2 と d を割るものを除く) の記号をすべて
計算し、 $(d | p)$ が $p \bmod m$ だけで決まるような最小の m を、 $m = 1$ から順に全数探索した。

d	$d \bmod 4$	最小の m	$ \text{disc}(d) $	$4 d $
-1	3	4	4	4
2	2	8	8	8
-2	2	8	8	8
3	3	12	12	12
-3	1	3	3	12
5	1	5	5	20
-5	3	20	20	20
6	2	24	24	24
7	3	28	28	28
13	1	13	13	52
17	1	17	17	68
-7	1	7	7	28
-11	1	11	11	44
21	1	21	21	84
29	1	29	29	116
-19	1	19	19	76

十六個すべてで、最小の m は $|\text{disc}(d)|$ にちょうど一致した。(証明終)

観察 3.2

定義は d を p で割り、定理は p を判別式で割る。定義のどこにも、答が p について周期的であるべき理由は書かれていない。相互法則とは、この周期性の主張である——どちらの側で割るかが入れ替わること、それが「相互」という語の指しているものである。

観察 3.3

周期があること自体が、法則の中身である。周期の値は、その次に来る問いにすぎない。

4. 分離子は $d \bmod 4$ である

検算 4.1：上の表から、 $4|d|$ と最小の m の比を取る。

$d \bmod 4$	例	$4 d \div$ 最小の m
1	$-3, 5, 13, 17, -7, -11, 21, 29, -19$	4
2 または 3	$-1, 2, -2, 3, -5, 6, 7$	1

(証明終)

観察 4.2

$4|d|$ は常に周期である——だが最小とは限らない。 $d \equiv 1 \pmod{4}$ のときだけ、真の法はその四分の一に落ちる。動かすと動くものは $d \bmod 4$ であって、 d の大きさでも符号でもない。

観察 4.3

したがって法は「都合よく選ばれた数」ではない。4 を掛けるかどうかを決めているのは $d \bmod 4$ であり、そこに選択の余地はない——論文95 の言葉でいえば、これは規約ではなく事実の側にある。

5. 4 と 8 は、二つの理由ではなく一つである

観察 5.1

第一補充則は $p \bmod 4$ についての主張であり、第二補充則は $p \bmod 8$ についての主張である。二つの違う数が、二つの違う理由で現れているように見える。

検算 5.2：測定値を並べる。

d	最小の m (測定)	$ \text{disc}(d) $	対応する補充則
-1	4	4	第一
2	8	8	第二
-2	8	8	二つの積

さらに **20000** 未満のすべての奇素数で $(2 \mid p)$ を $p \bmod 8$ ごとに集めると、 $p \equiv 1, 7$ では常に $+1$ 、 $p \equiv 3, 5$ では常に -1 であり、一つの類の中で値が割れた例は一つもなかった。(証明終)

観察 5.3

4 と **8** は同根である——どちらも $|\text{disc}|$ であり、違うのは d の値だけである。二つの補充則は二つの定理ではなく、一つの主張を $d = -1$ と $d = 2$ で読んだものである。

観察 5.4

本体系は「一語・別根」を言うことが多い。ここではその逆をしている——別々に見えていた二つの数に、一つの住所を与えた。論文31 が立体角の π とガウス積分の π を同根と確かめ、論文142 がウンルーとホーキングの 2π を同根と確かめたのに続いて、これが三度目である。

6. それでも、法則は根を与えない

検算 6.1：相互法則によるヤコビ記号の計算（べき乗を一度も使わない）と、トネリ＝シャンクスによる平方根の構成を、同じ素数で並べる。

p	$p \bmod 8$	可否の判定	平方根の構成
1000003	3	4 手	20 手
10000019	3	7 手	24 手
100000007	7	6 手	27 手
1000000007	7	5 手	30 手

いずれも $x^2 \equiv a \pmod{p}$ を満たすことを確かめた。(証明終)

観察 6.2

隔たりは手数だけではない。トネリ＝シャンクスは、まず非剰余を一つ見つけるところから始まる——そして 2, 3, 5, ... と順に試す以外の方法を持たない。

検算 6.3：1 から 199 までの非剰余がいくつあるかを数える。

p	1..199 の非剰余の個数	最小の非剰余
1000003	105	2
10000019	99	2
100000007	97	5

(証明終)

観察 6.4

個数は定理が言う——非零の $p-1$ 類のうちちょうど半数が非剰余である。だが定理はそのうちの一つも名指さない。数えるのは定理であり、一つ産むのは探索である——最小の非剰余を決定的に多項式時間で出す方法は知られていない。

観察 6.5

論文163 が「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」を分けたのと同じ形である。相互法則は「在るか」に答え、「どれか」には答えない。論文25 が「解けない」を三つに分けたときと同じく、ここでも許した道具が分離子になっている。

7. 点呼

観察 7.1

文	何で割るか	動かすと動くもの	住所
$(d \mid p)$ の定義	d を p で	d	p ごとに計算
相互法則	p を $ \text{disc}(d) $ で	$d \bmod 4$	周期 = 判別式
第一補充則	p を 4 で	$d = -1$	$ \text{disc}(-1) = 4$
第二補充則	p を 8 で	$d = 2$	$ \text{disc}(2) = 8$
平方根の構成	——	許した道具	探索であって定理ではない

観察 7.2

定義と定理は違うものを見ている。補充則の 4 と 8 は一つの根であり、法は選ばれていない。そして可否を知ることと、根を持つことは、最後まで別のままである。

8. 結論

- 法則と二つの補充則を定義から検算した（検算2.1）： 1830 対、破れ 0 。
- 最小の周期は判別式である（検算3.1）：十六個の d すべてで $m = |\text{disc}(d)|$ 。
- 分離子は $d \bmod 4$ （検算4.1）： $d \equiv 1$ のとき $4 \mid d$ は四倍過剰。
- 補充則の 4 と 8 は同根（検算5.2）：どちらも $|\text{disc}|$ 。
- 法則は根を与えない（検算6.1・6.3）： 5 手対 30 手、そして非剰余は探索でしか出てこない。

結び：定義は d を p で割る。定理は p を判別式で割る。割る向きが入れ替わることに驚けるかどうか、この法則を読めたかどうかの分かれ目であり、 4 と 8 という二つの数が実は一つだったことは、その驚きのささやかな配当である。

参考文献

1. Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae*. Leipzig: Gerhard Fleischer.
2. Legendre, A.-M. (1798). *Essai sur la théorie des nombres*. Paris: Duprat.
3. Dirichlet, P. G. L. (1837). *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält*. Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften.
4. Tonelli, A. (1891). *Bemerkung über die Auflösung quadratischer Congruenzen*. Göttinger Nachrichten.
5. Shanks, D. (1973). *Five number-theoretic algorithms*. Proceedings of the Second Manitoba Conference on Numerical Mathematics.
6. Ireland, K., & Rosen, M. (1990). *A Classical Introduction to Modern Number Theory* (2nd ed.). New York: Springer.
7. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
8. 山岸勇輝 (2026). 「解けない」は三つの別根を持つ [論文25]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090297
9. 山岸勇輝 (2026). 次元を持たない π [論文31]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090430
10. 山岸勇輝 (2026). 必然性の四つの根 [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
11. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実を分ける [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
12. 山岸勇輝 (2026). 動かすと、 2π だけが残る [論文142]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082281
13. 山岸勇輝 (2026). 同じ H^2 でも、係数が違えば量子化しない [論文147]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083144
14. 山岸勇輝 (2026). 同じ指標表を持ちながら、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
15. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
16. 山岸勇輝 (2026). 「等価原理」は三つある [論文165]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092957

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)