

一意化が与えるのは「一つの形」ではなく、「一つの模型と、一つの径数」である

— 平面と円板は同相で非共形：位相が見ない一つの実数 — [論文167]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

一意化定理は「単連結なリーマン面は球面・平面・円板のいずれかである」と述べる。三つに分かれる、と聞けば位相の話に聞こえる——だが平面と円板は同相である。分けているのは位相ではない。新しい数学定理は主張しない——リーマン以来の標準的内容である。第一に、罨から入る。 $h(z) = z/(1 - |z|)$ は円板から平面への同相写像であり、半径方向と接方向の直角をちょうど **90.0** 度に保つ。一つの角を保つことは共形であることではない——**45** 度傾けた直角は $z = 0.8$ で **157.38** 度を開き、全方向の伸び率の比は **1.25/2.0/5.0** である（正則写像はどこでも **1.0**）（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。偏心した環状領域はどれも互いに同相だが、共形に等しいのは実数一つが一致するときだけである。その数をメビウス変換の構成と **arccosh** 公式という独立な二経路で求め、六つの例で**20桁**一致させた（第3節）。第三に、同じ数を持つ族を実際に解いた。 $R = 1$ 、内円の中心のずれ $d = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ に対し、内半径を **0.296707, 0.286870, 0.270614, 0.248139** と取ると、見た目のまるで違う四つの領域が同一のモジュラス **1.203973** を持つ（第4節）。第四に、トーラスでは径数が複素数になる。 j をテータ関数から独立に組んで $j(i) = 1728$ 、 $j(2i) = 287496$ を確かめ、 $j(\tau) = j(\tau + 1) = j(-1/\tau)$ を **10^{-27}** で検証した。一意化は「一つの形」で終わらない（第5節）。第五に、 χ の符号は閉曲面でしか決めない。平面と円板はともに $\chi = 1$ で可縮でありながら、模型が違う——開曲面の型は、いかなる位相不変量でも決まらない（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——一意化定理、リウヴィルの定理、環状領域のモジュラス、 j 不変量と $SL(2, \mathbb{Z})$ 、型の問題は、いずれも標準的である。また本稿は一意化定理を証明しない——示すのは測定であって証明ではない。加えたのはモジュラスを独立な二経路で出して一致を確かめたこと、同じモジュラスを持つ偏心環状領域の族を実際に解いて並べたこと、「一つの直角は保つのに共形でない」という罨を数で示したこと、 χ が閉曲面では決め開曲面では決めないという分岐を並べたことである。

1. 記法と位置づけ

写像が共形であるとは、各点ですべての方向の間の角を保つことをいう。本稿では各点で **720** 方向の伸び率を測り、その最大と最小の比を歪み比と呼ぶ。歪み比が **1** であることと共形であることは同値である。環状領域のモジュラスとは、それを同心の環 $r < |z| < R$ に写したときの $\log(R/r)$ をいう。

位置づけ：論文111 は光が幾何を共形構造までしか決めないことを書き、論文105 は位相と微分構造が別根であることを **4**次元で示した。本稿はその中間の層を扱う——位相では分かれず、共形では分かれるもの。

2. 罨：一つの直角を保つことは、共形であることではない

事実 2.1： $h(z) = z/(1 - |z|)$ は開円板から平面への全単射であり、その逆は $w \mapsto w/(1 + |w|)$ である。**16** 点での往復誤差は 1.2×10^{-32} であった。

検算 2.2：半径方向と接方向という、直角に交わる二方向の像のなす角を測る。

点	h による	$z \mapsto z^2 + z$ による
$z = 0.2$	90.0	90.0
$z = 0.5$	90.0	90.0
$z = 0.8$	90.0	90.0

どちらも保っている。(証明終)

観察 2.3

半径方向の写像は、この直角だけは必ず保つ——半径方向と接方向が、像でも直交したままだからである。したがって「角を保つ」を一組の角で確かめてはならない。

検算 2.4：同じ直角を **45** 度傾けて測り直し、さらに全 **720** 方向の伸び率の比を取る。

点	h : 45 度傾けた角	$z^2 + z$: 同	h : 歪み比	$z^2 + z$: 歪み比
$z = 0.2$	102.68038	90.0	1.25	1.0
$z = 0.5$	126.8699	90.0	2.0	1.0
$z = 0.8$	157.38014	90.0	5.0	1.0

(証明終)

観察 2.5

正則写像の歪み比はどの点でも 1.0 ちょうどである。同相写像のそれは縁に近づくほど大きくなる—— $1/(1-r)$ である。位相はこの数を見ない。

観察 2.6

そして共形なものは一つも存在しない。もし平面から円板への共形全単射があれば、それは有界な整関数であり、コーシーの評価 $|f'(0)| \leq M/R$ がすべての R で成り立つから、 $R = 10, 10^3, 10^6, 10^{12}$ に対し上界は $0.1, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-12}$ と落ちて $f' = 0$ になる (リウヴィル)。定数でない有界整関数は無い。

3. 芯：位相が見ない一つの実数

記法 3.1：円 $|z| = R$ と円 $|z - d| = r$ に挟まれた領域を考える。どの二つも互いに同相である。

検算 3.2：モジュラスを独立な二経路で求める。第一の経路は、両方の円に関して同時に鏡像となる二点 p, q ($pq = R^2$ かつ $(p - d)(q - d) = r^2$) を解いてメビウス変換 $w = (z - q)/(z - p)$ を作り、両円の像が本当に同心円になっていることを各 400 点で確かめてから半径の比を読む。第二の経路は $\operatorname{arccosh}\left(\frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}\right)$ である。

R	r	d	メビウス経由	$\operatorname{arccosh}$ 経由	像の円の半径の散らばり
1	0.3	0	1.203972804	1.203972804	(もともと同心)
1	0.3	0.2	1.15881036	1.15881036	9.9×10^{-32}
1	0.3	0.5	0.8670147265	0.8670147265	3.9×10^{-31}
1	0.5	0.4	0.4211448485	0.4211448485	5.4×10^{-31}
2	0.1	1.5	2.161580941	2.161580941	1.1×10^{-30}
1	0.45	0.5	0.3399260616	0.3399260616	9.9×10^{-31}

六例すべてで二経路が 20 桁一致し、像の円は数値の塵の範囲で同心であった。(証明終)

観察 3.3

同心の場合の $\log(R/r)$ が、偏心の場合には $\operatorname{arccosh}$ に置き換わる—— $d = 0$ で $\cosh(\log(R/r)) = (R^2 + r^2)/(2Rr)$ だから、二つは同じ式の二つの読みである。

4. 同じ数を持つ、見た目の違う領域たち

検算 4.1： $R = 1$ を固定し、モジュラスが 1.203972804（すなわち $d = 0$ 、 $r = 0.3$ の同心環と同じ値）になるように内半径を解く。

ずれ d	内半径 r	メビウス経由で測り直したモジュラス
0	0.3	1.203972804
0.1	0.296706871877	1.203972804
0.2	0.286870020776	1.203972804
0.3	0.270614346149	1.203972804
0.4	0.248139402709	1.203972804

(証明終)

観察 4.2

五つの領域は、描けばまるで違って見える——一つは真ん中に穴があり、一つは穴が縁のほうへ寄っている。それらは共形に同一である。そして $R = 1, r = 0.45, d = 0.5$ の領域は、モジュラス 0.3399 で別物である。

観察 4.3

一つの実数が決めており、位相はその数をも見ない。論文152 が「同じ指標表を持ちながら同型でない」と書いたのと、向きが逆である——あちらは同じ不変量で別物、こちらは違う見方で同一物。どちらも「どの不変量で問うたか」で答が変わる。

5. トーラス：径数が複素数になる

事実 5.1：トーラスは $\mathbb{C}$ を格子で割ったものであり、二つが共形に等しいのは、 τ が $SL(2, \mathbb{Z})$ を法として一致するときに限る。

検算 5.2： j をテータ関数から $\lambda = \theta_2^4/\theta_3^4$ 、 $j = 256(1 - \lambda + \lambda^2)^3/(\lambda^2(1 - \lambda)^2)$ として組み、正規化を借り物にしないために別経路の値とも突き合わせた。

$j(i)$ (テータ関数から)	1728.0
$j(i)$ (別経路)	1728.0
$ j(e^{2\pi i/3}) $	1.5×10^{-88}

検算 5.3： $\tau = 0.31 + 1.27i$ で $SL(2, \mathbb{Z})$ の二つの生成元を当てる。

j		$j(\tau)$ との差
$j(\tau)$	$-357.8718154056521 - 2654.846593778724i$	—
$j(\tau + 1)$	同上	2.0×10^{-27}
$j(-1/\tau)$	同上	1.8×10^{-27}

(証明終)

観察 5.4

j は「トーラス」の関数であって、「引いた格子」の関数ではない。

検算 5.5：同相だが共形には等しくないトーラスたち。

τ	$j(\tau)$
i	1728.0
$2i$	287496.0
$3i$	153553679.39673
$0.5 + i$	-89.594997669383

(証明終)

観察 5.6

四つはすべて同じ位相の曲面である。 j の値が違うから、はじめの三つはどの二つも共形には等しくない。一意化は「一つの形」で終わらない——終わるのは「一つの模型と、モジュライ空間の一点」である。

6. χ の符号は、閉曲面でしか決めない

検算 6.1：ガウス＝ボンネにより $\int K = 2\pi\chi$ であるから、閉曲面では χ の符号が模型を選ぶ。

種数	χ	符号	模型
0	2	+	球面
1	0	0	平面（平坦）
2	-2	-	円板（双曲）
3	-4	-	円板（双曲）
4	-6	-	円板（双曲）

検算 6.2：開曲面では決めない。

曲面	χ	ホモトピー型	模型
平面	1	一点	平面
開円板	1	一点	円板

（証明終）

観察 6.3

χ も同じ、ホモトピー型も同じ、模型が違う。開曲面がどちらであるかを定める問い（型の問題）は、いかなる位相不変量でも決まらない。普遍被覆による三分法と、 χ の符号による三分法は、閉曲面では一致し、開曲面で袂を分かť——論文67・論文128 が $4\pi = 2\pi\chi$ の成り立つ場所を限ったのと同じ作法である。

7. 「一意」は、三つの実条件のあとの一意である

事実 7.1：円板の自己同型はすべて $e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ の形であり、 a が二つ、 θ が一つで実三径数である。

検算 7.2：二つの合成を、その値だけから読み直すと $a = -0.4157923416 + 0.4781102072i$ 、 $\theta = -0.5242149765$ が得られ、15 点での食い違いは 2.9×10^{-31} であった。 $z_0 = 0.35 - 0.2i$ に対し $a = z_0, \theta = 0$ と取れば $f(z_0) = 0$ 、 $f'(z_0) = 1.194029851$ （虚部 2×10^{-69} ）で実正である。（証明終）

観察 7.3

「一意化」の「一意」は、正規化のあとの一意である。前は三径数の族、後是一片。条件を課す前の「唯一の写像」は存在しない。

8. 点呼

観察 8.1

対象	住所	分離子	注
三つの模型	球面／平面／円板	曲率の符号	位相では分かれる
平面と円板	同相・非共形	リウヴィル	有界整関数は定数
環状領域	モジュラス一つ	$\log(R/r)$ または $\operatorname{arccosh}$	位相は見ない
トーラス	j 不変量	$SL(2, \mathbb{Z})$ を法とする τ	模型＋径数
閉曲面	χ の符号	種数	ガウス＝ボンネ
開曲面	χ は決めない	型の問題	位相不変量では決まらない
写像の一意性	三つの実条件	正規化	前は三径数の族

観察 8.2

「三つに分かれる」は位相の文ではない。そして「一つに決まる」も、そのままでは正しくない——決まるのは模型であって、径数はそのあとに残る。

9. 結論

- 一つの直角は同相写像でも保たれる（検算2.2・2.4）：歪み比 $1.25/2.0/5.0$ 対 1.0 。
- モジュラスは独立な二経路で 20 桁一致した（検算3.2）。
- 同じモジュラスを持つ見た目の違う族を解いた（検算4.1）： $\tau = 0.296707, \dots, 0.248139$ 。

4. j は $SL(2, \mathbb{Z})$ で不変 (検算5.3) : $j(i) = 1728$, $j(2i) = 287496$ 。
5. χ は開曲面では決めない (検算6.2) : 平面と円板はともに $\chi = 1$ 。
6. 「一意」は三条件のあとの一意 (検算7.2)。

結び：一意化定理は、形を一つに畳んでくれる定理として語られることが多い。畳んでくれるのは模型までであり、そのあとに一つの実数、あるいは一つの複素数が残る。残った怪数を「余り」と見るか「答の一部」と見るかで、この定理の読み方は変わる。

参考文献

1. Riemann, B. (1851). *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Göttingen: Dissertation.
 2. Koebe, P. (1907). *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*. Göttinger Nachrichten.
 3. Poincaré, H. (1907). *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*. Acta Mathematica, 31.
 4. Liouville, J. (1844). *Leçons sur les fonctions doublement périodiques*. Journal für die reine und angewandte Mathematik.
 5. Ahlfors, L. V. (1978). *Complex Analysis* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
 6. Klein, F. (1878). *Über die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*. Mathematische Annalen, 14.
 7. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチのオイラー標数的起源 [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
 8. 山岸勇輝 (2026). 曲率は内在的である [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
 9. 山岸勇輝 (2026). スペクトルから形を聴く [論文102]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836735
 10. 山岸勇輝 (2026). 幾何を正準形へ流す [論文103]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836801
 11. 山岸勇輝 (2026). 4次元だけの例外 [論文105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
 12. 山岸勇輝 (2026). 光はどこまで幾何を決めるか [論文111]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21961685
 13. 山岸勇輝 (2026). $4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである [論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576
 14. 山岸勇輝 (2026). 同じ指標表を持ちながら、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
 15. 山岸勇輝 (2026). 定義は d を p で割り、定理は p を判別式で割る [論文166]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093052
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)