

ルベークが買ったのは、クラスの大きさではなく、極限で閉じることである

— 「積分」の別根点呼：分離子は測度・絶対収束・基本定理 — [論文168]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「積分」という一語が、少なくとも五つの別のものを指している。本稿はそれを点呼し、ルベーク積分の利点は「積分できる関数が増えること」ではないことを数で示す。新しい数学定理は主張しない——いずれも標準的な内容である。第一に、リーマンで決めているのは不連続点の稠密さではなく測度である。トマエ関数はすべての有理数で不連続でありながらリーマン可積分 ($q \leq 1000$ の点 **304194** 個を覆っても上積分の上界は **0.002**)、一方太いカントール集合は疎でありながら測度 **1/2** を持ち、その指示関数は可積分でない (第2節)。第二に、これが本稿の芯である。ルベークは広義リーマンを含まない。 $\sin x/x$ の積分は **1000 π** までで **1.57047801697** ($\pi/2 = 1.57079632679$) に落ち着くのに、 $|\sin x|/x$ は十進ごとに **1.465870064** ずつ増え続ける——予測値 $(2/\pi) \log 10 = 1.465871198$ と5桁一致。分離子は絶対収束である (第3節)。第三に、そのどちらもゲージ積分を含まない。 $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ は至るところ微分可能で、 $F(1) - F(\varepsilon)$ は **0.8414709848079** $= \sin 1$ に収まるのに、変動は $k = 10^5$ までで **7.94274870532** と発散し続ける。分離子は微分積分学の基本定理である (第4節)。第四に、では何を買ったのか。有理数を n 個ずつ拾う指示関数はどれもリーマン可積分で、その極限だけがクラスの外に出る。ルベークのクラスは漏れない——買ったのは大きさではなく閉じていることである (第5節)。第五に、収束定理の仮定は飾りではない。 $g_n = n \cdot \mathbf{1}_{(0,1/n)}$ は各点で **0** に収束し、積分は常に **1** である (第5節)。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——リーマンの可積分条件、トマエ関数、太いカントール集合、 $\sin x/x$ の広義可積分性、 $x^2 \sin(1/x^2)$ の導関数、ヘンストック＝クルツヴァイル積分、収束定理は、いずれも標準的である。またどの積分が「正しい」かを判定しない——書けるのは、それぞれが何を要求しているかまでである。加えたのは「稠密か」と「測度」を二例で分離して並べたこと、 $|\sin x|/x$ の十進ごとの増分を測って $(2/\pi) \log 10$ と一致させたこと、同じ表に符号付きの収束と絶対値の発散を並べたこと、五つの積分に「動かすと動くもの」を書いたことである。なお伊藤積分は第六の別根であり、論文132・論文148で既に扱った——本稿では住所を指すにとどめる。

1. 記法と位置づけ

有界関数がリーマン可積分であるとは、上積分と下積分が一致することをいう。ルベグ可積分であるとは、可測かつ $\int |f| < \infty$ であることをいう。この二つの定義は、要求している事柄が違う——前者は刻みの細かさについての要求であり、後者は絶対値についての要求である。

位置づけ：論文92 は微分形式の積分が向き付き鎖の上で定義されることを書き、論文94 は「次元」が一つでないことをハウスドルフ測度まで含めて点呼した。本稿はその隣で「積分」を点呼する。

2. リーマンで決めているのは、稠密さではなく測度である

観察 2.1

ディリクレ関数（有理数で 1、それ以外で 0）は、どの小区間にも有理数と無理数が入るから、どんな分割でも上和が 1、下和が 0 である。可積分でない。

検算 2.2：トマエ関数（既約分数 p/q で $1/q$ 、無理数で 0）はすべての有理数で不連続である。 $\epsilon = 1/q_0$ より大きい値を取る点は有限個しかないから、それを細い区間で覆って上積分を評価する。

$\epsilon = 1/q_0$	$f > \epsilon$ となる点の個数	覆いの幅	上積分の上界
1/10	34	0.002941	0.2
1/100	3046	3.283×10^{-6}	0.02
1/1000	304194	3.287×10^{-9}	0.002

上界はいくらでも小さくなるから、トマエ関数はリーマン可積分で、積分は 0 である。（証明終）

検算 2.3：太いカントール集合を作る。 $[0, 1]$ から、第 n 段で各区間の真ん中の長さ 4^{-n} を取り除く。

段	区間の個数	残る測度	最長の区間
1	2	0.75	0.375
2	4	0.625	0.15625
4	16	0.53125	0.0332031
8	256	0.501953125	0.00196075
12	4096	0.500122070313	0.0001221

測度は $1/2$ に収束し、最長の区間は 0 に落ちる——すなわちこの集合は疎でありながら測度 $1/2$ を持つ。その指示関数の不連続点は集合そのものだから、どんな分割でも上和と下和の差が $1/2$ 残り、リーマン可積分でない。(証明終)

観察 2.4

トマエは稠密に不連続で可積分、太いカントールは疎で不可積分である。したがって決めているのは稠密さではない——不連続点の測度である（ルベグの判定条件）。「どこにでもある」と「どれだけある」は別の問いである。

3. 芯：ルベグは広義リーマンを含まない

検算 3.1： $\sin x/x$ を半直線上で積分する。区間 $[k\pi, (k+1)\pi]$ ごとに求めて足し上げた。

上限	$\int \frac{\sin x}{x} dx$	$\int \frac{ \sin x }{x} dx$
10π	1.53902907958	1.45572998476
100π	1.56761329243	2.92148797826
1000π	1.57047801697	4.38735804234
$\pi/2$ (比較)	1.57079632679	——

検算 3.2：発散する側の、十進ごとの増分を測る。

10 π から 100 π	1.465757993
100 π から 1000 π	1.465870064
予測値 $(2/\pi) \log 10$	1.465871198

(証明終)

観察 3.3

符号付きの積分は $\pi/2$ に落ち着き、絶対値の積分は十進ごとに一定量を足し続ける——どこまでも、である。したがって $\sin x/x$ は広義リーマン可積分であって、ルベグ可積分ではない。

観察 3.4

分離子は絶対収束である。ルベグの定義が $\int |f| < \infty$ を要求している以上、符号の相殺で成り立っている収束は、はじめから対象外である。「ルベグはリーマンの拡張である」という一文は、広義を除いたときにだけ正しい。

4. そのどちらもゲージ積分を含まない

事実 4.1 : $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ ($F(0) = 0$) は原点を含め至るところ微分可能である。したがって F' は「或る関数の導関数」であり、基本定理はこれについて成り立ってほしい。

検算 4.2 : 符号付きの側は、基本定理そのままである。

ε	$F(1) - F(\varepsilon)$
10^{-2}	0.84150154624679
10^{-4}	0.84147097549151
10^{-8}	0.8414709848079
10^{-16}	0.8414709848079
$\sin 1$ (比較)	0.8414709848079

検算 4.3：絶対値の側はそうならない。 F は $\sin(1/x^2) = \pm 1$ となる点 $x_k = 1/\sqrt{\pi/2 + k\pi}$ で $\pm x_k^2$ に達するから、変動はそれらの差の和以上である。

k まで	変動は少なくとも	$(2/\pi) \log k$
10	2.10984075491	1.46587119776
1000	5.01132130405	4.39761359328
10^5	7.94274870532	7.32935598879

(証明終)

観察 4.4

変動は際限なく増えるから $\int |F'| = \infty$ であり、 F' はルベグ可積分でない。ゲージ積分（ヘンストック＝クルツヴァイル）はこれを積分し、 $F(1) - F(0)$ を返す。

観察 4.5

分離子は微分積分学の基本定理である。「導関数はもとの関数から復元できる」を例外なく満たすのは、この積分だけである。刻みの幅を点ごとに变えてよい、という一点だけを緩めた結果である。

5. では、ルベグは何を買ったのか

観察 5.1

$[0, 1]$ の有理数を順に並べ、はじめの n 個の指示関数を f_n とする。

n	リーマン可積分か	積分
1	はい（有限個の点）	0
10	はい	0
1000	はい	0
極限	いいえ（ディリクレ関数）	ルベークでは 0

観察 5.2

各項はリーマンのクラスの中にあり、極限だけが外へ出る。ルベークのクラスは漏れない。買ったのはクラスの大きさではなく、極限で閉じていることである——単調収束定理・優収束定理・フビニは、その閉性の別名にすぎない。

検算 5.3：ただし収束定理の仮定は飾りではない。 $g_n = n \cdot \mathbf{1}_{(0,1/n)}$ を取る。

n	$\int g_n$	固定した $x = 0.001$ での $g_n(x)$
10	1	10
1000	1	1000
10^6	1	0

各点で 0 に収束し、積分は常に 1 である。（証明終）

観察 5.4

単調でもなく、可積分な優関数もないから、どちらの定理も使えない——そして結論も成り立たない。これは積分の欠陥ではない。定理は言っていることだけを言っており、仮定は名指しで要求されていたのである（論文16の「＝」の取り違えと同じ形）。

6. 点呼

観察 6.1

積分	何を刻むか	動かすと動くもの	注
リーマン	定義域を刻む	不連続点の測度	極限で閉じない
ルベーク	値域を刻む	絶対可積分性	極限で閉じる
広義リーマン	極限として定義する	符号の相殺	ルベークに含まれない
ゲージ (HK)	刻みを点ごとに変える	基本定理	上の三つを含む
微分形式	向き付き鎖の上で	向き	測度ではない (論文92)
伊藤	道の粗さで	道の粗さ	別根 (論文132・148)

観察 6.2

六つは強さの階段ではない。ルベークはリーマンより「広い」が広義リーマンを含まず、ゲージは三つを含むが値域を刻んではない。どれを使うかは、何を要求するかで決まる。

7. 結論

- リーマンで決めるのは測度であって稠密さではない (検算2.2・2.3) : トマエは稠密で可積分、太いコントロールは疎で不可積分。
 - ルベークは広義リーマンを含まない (検算3.1・3.2) : 増分 1.465870064 対 $(2/\pi) \log 10 = 1.465871198$ 。
 - どちらもゲージ積分を含まない (検算4.2・4.3) : $\sin 1$ に収まる符号付きと、 7.94 を超えて伸びる変動。
 - 買ったのは大きさではなく閉性 (観察5.2)。
 - 収束定理の仮定は飾りではない (検算5.3) : 各点 0 、積分は常に 1 。
- 結び : 「ルベーク積分はリーマン積分より強い」という一文は、強さの向きを一つしか見ていない。増えたのは関数ではなく、定理である——極限と積分を交換してよい、という一文を手に入れるために、絶対収束という代金が支払われた。

参考文献

1. Riemann, B. (1854). *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Habilitationsschrift, Göttingen.
2. Lebesgue, H. (1902). *Intégrale, longueur, aire*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 7.
3. Thomae, J. (1875). *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale*. Halle: Nebert.
4. Volterra, V. (1881). *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue*. Giornale di Matematiche, 19.
5. Henstock, R. (1955). *Definitions of Riemann type of the variational integrals*. Proceedings of the London Mathematical Society, 11.
6. Kurzweil, J. (1957). *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*. Czechoslovak Mathematical Journal, 7.
7. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
8. 山岸勇輝 (2026). 最小作用の原理 [論文84]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21741231
9. 山岸勇輝 (2026). 共通のアルファベット [論文92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
10. 山岸勇輝 (2026). 「次元」は一つではない [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
11. 山岸勇輝 (2026). 伊藤の **2** は、次元ではない [論文132]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080358
12. 山岸勇輝 (2026). $\epsilon^2 = 0$ は環の定義であり、 $(dW)^2 = dt$ は道の事実である [論文148]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083237
13. 山岸勇輝 (2026). 「不適切」は一語ではない [論文159]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092229
14. 山岸勇輝 (2026). 一意化が与えるのは「一つの形」ではなく、「一つの模型と、一つの径数」である [論文167]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093172

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)