

約分すると、+1 ではなく -1 が出る

— 記法は規約である。だが規約は無害ではない：ライプニッツの d が守る約束と、破る約束 — [論文

170]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

記法は規約であり、定理を一つも動かさない。だが何を思いつくかは動かす。本稿はライプニッツの dy/dx について、その約束が守られる場所と破られる場所を同じ計算で並べる。新しい数学定理は主張しない——いずれも標準的な内容である。第一に、記法は答を動かさない。ニュートンの点で書こうとライプニッツの d で書こうと、 $f(x) = \sin(x^2)e^{-x}$ の $x = 0.7$ での微分は同じ **0.37970904324369351073** である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。 dy/dx は分数に見え、一変数の連鎖律では実際に約分のように振る舞う。ところが三つの変数が一つの関係で結ばれると、約分の答は **-1** である——理想気体でも、陰関数曲面 $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 10$ の三点でも、すべて **-1.0**（第3節）。第三に、二階では分数の読みが破綻する。 $x = t^3$ 、 $y = t^2$ で、真の d^2y/dx^2 は $t = 2$ で **-0.013888888888889**、分数として読むと **+0.166666666666667**——値どころか符号が違う（第4節）。第四に、同じ記法が一方の約束は守る。積の法則は本当に二項定理であり（ $n = 6$ まで一致）、項数は $n + 1$ 、重みの総和は 2^n 。一方連鎖律は守らない——項数は分割数、重みの総和はベル数であり、 $n = 10$ で **1024** 対 **115975**（第5節）。第五に、同じ記号が二つの役を演じる。 $z = x^2 + y^2$ 、 $y = 3x$ で、 y を止めた微分と y を追わせた微分は十倍違う——添字は飾りではない（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——三重積関係、 d^2y/dx^2 が分数でないこと、ライプニッツの積の法則、ファ・ディ・ブルーノの公式とベル数、偏微分の添字は、いずれも標準的である。また歴史的な優先権論争については判定しない——扱うのは記法の振る舞いだけである。加えたのは同じ一つの記法が五つの場所でどう振る舞うかを、同じ計算で一枚に並べたこと、とくに積の法則の重み 2^n と連鎖律の重みベル数を同じ表に置いたことである。

1. 記法と位置づけ

本稿の微分はすべて数値的に計算した。規約とは、選び直しても事実が動かない取り決めのいう（論文95）。

位置づけ：論文95 は規約と事実を分け、「規約だから何でもよい」ではないと書いた。本稿はその一例を、記法という最も薄い規約について書く——薄いのに、間違いの種類を決めているのである。

2. 記法は答を動かさない

検算 2.1： $f(x) = \sin(x^2)e^{-x}$ の $x = 0.7$ での微分。

数値的に計算	0.37970904324369351073
閉じた式から	0.37970904324369351073
差	4.93×10^{-32}

(証明終)

観察 2.2

ニュートンなら $\dot{f}$ 、ライプニッツなら df/dx と書く。数は同じである。記法は規約であり、定理を一つも動かさない。以下はすべて、この前提の上での話である。

3. 芯：約分すると -1 が出る

観察 3.1

dy/dx は分数に見える。一変数の連鎖律 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ では、実際に約分のように振る舞う。この成功が、次の場面へ持ち越される。

検算 3.2：理想気体 $PV = nRT$ ($nR = 1$) で、三つの偏微分をそれぞれ第三の変数を止めて計算する。

T を止めた $\partial P/\partial V$	-0.75
P を止めた $\partial V/\partial T$	0.6666666666666667
V を止めた $\partial T/\partial P$	2.0
三つの積	-1.0

検算 3.3：理想気体の癖ではない。陰関数曲面 $F = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 10 = 0$ で繰り返す。

x	y	z	三重積
1.0	1.0	1.833751	-1.0
1.5	0.5	1.732544	-1.0
0.7	1.3	1.7990588	-1.0

(証明終)

観察 3.4

約分の答は毎回 -1 である。記法が約分を誘い、約分は符号を落とす。

観察 3.5

ニュートンの点は、これを誘えない——分母を持たないからである。二つの記法は同じ定理を書くが、犯しうる間違いの種類が違う。規約が選べるのは真偽ではなく、滑りやすさである。

4. 二階では、分数の読みが破綻する

検算 4.1： $x = t^3$ 、 $y = t^2$ とし、 d^2y/dx^2 を「二階微分の比」として読んだ場合と比べる。

t	真の d^2y/dx^2	比として読んだ値
1.0	-0.22222222222222	+0.33333333333333
2.0	-0.013888888888889	+0.16666666666667
3.0	-0.0027434842249657	+0.11111111111111

真の値は $-2/(9t^4)$ 、比として読むと $+1/(3t)$ である。(証明終)

観察 4.2

値が違うだけではない——符号が違う。 d^2y/dx^2 は一つの記号であって、二つのものの分数ではない。一階で当たったことが、二階で当たる保証を一つも与えていない。

5. 一方の約束は守り、他方は破る

検算 5.1：積の法則。 $u = e^{2x}$ 、 $v = \sin 3x$ 、 $x = 0.4$ で、 n 階微分を直接計算した値と $\sum_k \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$ を比べる。

n	直接	二項和
1	6.567908305582929	6.567908305582929
2	−0.6941515037403181	−0.6941515037403181
4	−343.6136864015332	−343.6136864015332
6	3553.448468147446	3553.448468147446

一致する。(証明終)

検算 5.2：連鎖律。 $g = \sin$ 、 $h = e^x - 1$ 、 $x = 0.3$ で $n = 4$ のファ・ディ・ブルーノの公式を当てる。

$d^4g(h(x))$ を直接	−15.82942435520884
ファ・ディ・ブルーノ (まとめて4項)	−15.82942435520884
差	0

使った重複度は 1、4 と 3、6、1 であり、和は $15 = B_4$ である。(証明終)

検算 5.3：二つの伸び方を並べる。

n	積：項数	積：重みの和	連鎖：項数	連鎖：重みの和
2	3	4	2	2
4	5	16	5	15
6	7	64	11	203
10	11	1024	42	115975

(証明終)

観察 5.4

積の法則では、記法の約束がそのまま守られている——係数は二項係数そのもので、重みの総和は 2^n である。連鎖律では守られない——項数は分割数、重みの総和はベル数であり、 $n = 10$ で百倍以上の隔たりになる。

観察 5.5

一つの記法が、隣り合う二つの規則に対して違う態度を取る。だから「 d は分数のように使ってよい」は、規則ごとに確かめる以外にない。記法から出てくるのは予想であって、証明ではない。

6. 同じ記号が、二つの役を演じる

検算 6.1 : $z = x^2 + y^2$, $y = 3x$ とする。どちらも「 z を x で微分する」と言われる。

x	y を止めた微分	y を追わせた微分	比
1.0	2.0	20.0	10.0
2.0	4.0	40.0	10.0
5.0	10.0	100.0	10.0

(証明終)

観察 6.2

裸の記法が同じに書く二つのものが、十倍違う。熱力学が止める変数を添字で書くのは、このためである——添字は飾りではなく、それが無ければ式は数を指していない（論文16が「=」について書いたのと同じ形）。

7. 記法が正当化されるまで

観察 7.1

dx を「無限小」として使うことは、長く当たるが根拠のない操作であった。それが正当化されたのはカルタンの微分形式においてであり、そこで dx は1形式という定義された対象になり、「約分」は写像による引き戻しという定義された操作になった（論文92）。

観察 7.2

つまりライブニッツの記法は、二百年後に意味を与えられた。その間ずっと当たり続けたが、当たることは意味を持つことではない。当たり方の限界が第3節から第5節である。

8. 点呼

観察 8.1

場所	見かけ	実際	動かすと動くもの
一階の連鎖律	約分に見える	当たる	なし
三変数の関係	約分すると +1	-1	変数の個数
二階の d^2y/dx^2	分数に見える	符号すら違う	微分の階数
積の法則	二項定理に見える	二項定理である	なし
連鎖律の高階	単純に見える	ベル数	微分の階数
偏微分	一つの記号	二つの意味	何を止めるか

観察 8.2

記法は真偽を動かさない。動かすのは、どの誤りが自然に見えるかである。そしてそれは、次に何を思いつくかを動かす。

9. 結論

1. 記法は答を動かさない（検算2.1）。
2. 約分は -1 を出す（検算3.2・3.3）：理想気体でも陰関数曲面でも -1.0。
3. 二階では符号すら違う（検算4.1）：-0.0138889 対 +0.1666667。
4. 積は約束を守り、連鎖は破る（検算5.1～5.3）： $2^{10} = 1024$ 対 $B_{10} = 115975$ 。
5. 添字は飾りではない（検算6.1）：十倍。

結び：規約は自由を選べる。選べないのは、その選択がどの間違いを誘うかである。ライプニッツの *d* は三百年にわたって正しい予想を与え続け、同じ三百年にわたって同じ場所で人を滑らせてきた——滑る場所は、記法を選んだ時点で決まっていたのである。

参考文献

1. Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. London: Royal Society.
2. Leibniz, G. W. (1684). *Nova methodus pro maximis et minimis*. Acta Eruditorum.
3. Faà di Bruno, F. (1855). *Sullo sviluppo delle funzioni*. Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, 6.

4. Bell, E. T. (1934). *Exponential polynomials*. Annals of Mathematics, 35(2).
5. Cartan, É. (1899). *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 16.
6. Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland.
7. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
8. 山岸勇輝 (2026). 共通のアルファベット [論文92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
9. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実を分ける [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
10. 山岸勇輝 (2026). 関係としての時間と空間 [論文97]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758697
11. 山岸勇輝 (2026). 伊藤の **2** は、次元ではない [論文132]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080358
12. 山岸勇輝 (2026). $\epsilon^2 = 0$ は環の定義であり、 $(dW)^2 = dt$ は道の事実である [論文148]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083237
13. 山岸勇輝 (2026). 定義は **d** を **p** で割り、定理は **p** を判別式で割る [論文166]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093052
14. 山岸勇輝 (2026). ルベーグが買ったのは、クラスの大きさではなく、極限で閉じることである [論文168]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093320

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)