

最小二乗を囲っている柵は、正規分布ではなく線形性である

— ガウスの一人二定理：1809 は誤差則を仮定し、1821 は何も仮定しない — [論文171]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文157 は「最小二乗の 2 は仮定した誤差則である」と書いた。本稿はもう一つの柵に立つ——ガウスは同じ問題に二度答えており、二度目（1821）は分布を一つも仮定しない。それでも「最良」には柵がある——正規性ではなく線形性である。新しい数学定理は主張しない。第一に、ガウスは一人で二つの定理を持つ。1809 は「算術平均が最良である」と仮定して誤差則が正規だと導き、1821 は平均・等分散・無相関だけを仮定して最小分散を導く（第2節）。第二に、ガウス＝マルコフを直に検算した。和が 1 の重みを 200000 通り乱数で試して、 $1/n = 0.0909090909$ を下回るものは一つも無かった——最良でも 0.0919952051。この節では分布を一度も使っていない（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。分散が有限でガウス＝マルコフが完全に成り立つ場面（自由度 5 の t 分布）でも、線形性を捨てれば平均に勝てる——刈り込み平均で 0.8385 倍、フーバー推定で 0.8434 倍（第4節）。第四に、しかし線形性を破れば勝てる、のではない。同じ場面で中央値は負ける（1.0467 倍）——線形の外へ出ることは必要であって十分ではない（第4節）。第五に、不偏と有効は別根である。分散が不揃い（ $\sigma_i^2 = i$ ）のとき、素の平均も逆分散重みもどちらも不偏で、分散は 1.65 倍違う（第5節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——ガウス＝マルコフの定理、クラメール＝ラオの下界、 M 推定、一般化最小二乗は、いずれも標準的である。また最小二乗を批判しない——示すのは、その「最良」がどこまでの最良かである。論文157 との重なりについて：157 は「2 という指数が仮定した誤差則である」ことを示し、本稿は「誤差則を仮定しない議論のほうにも柵がある」ことを示す——同じ定理の二つの柵であって、結論は一つも撤回されない。加えたのはガウス＝マルコフを乱数で直に検算したこと、 t 分布で「非線形なら勝つ」が偽であることを中央値で示したこと、不偏性と有効性が同時に成立・不成立になりうると数で並べたことである。

1. 記法と位置づけ

推定量が線形であるとは、観測の重み付き和 $\sum w_i x_i$ で書けることをいう。不偏とは期待値が真値に等しいこと、有効とは分散が小さいことをいう。本稿の数値はすべて自前の乱数（正規はボックス＝ミュラー、 t 分布は

正規とカイ二乗から構成）で計算した。

位置づけ：論文157 は二乗の **2** を「仮定した誤差則」として住所付けした。本稿はその隣の柵に立つ——誤差則を仮定しない議論にも、別の柵があるのである。

2. ガウスは一人で二つの定理を持つ

事実 2.1

著作	仮定	結論
1809 Theoria Motus	算術平均が最良だと仮定	誤差則が正規だと導く
1821 Theoria Combinationis	分布を一つも仮定しない	最小分散を導く

観察 2.2

1809 の論法は、結論として得たいものを仮定に置いている。ガウス自身が 1821 でそれを置き換えた——新しい論法は、平均が零・分散が等しい・無相関、この三つだけを要求する。

観察 2.3

一人二定理は本体系で繰り返し現れる型である（ヤマベ、ホップ、ネーター、ナッシュ）。ここでも二つは強さの階段ではない——仮定が違い、したがって壊れ方が違う。

3. ガウス＝マルコフを直に検算する

検算 3.1： $n = 11$ とし、和が 1 の重みを乱数で 200000 通り作って $\sum w_i^2$ を比べる。

一様な重み $1/n$	0.0909090909
200000 通り中の最良	0.0919952051
200000 通り中の最悪	0.2864219851

$1/n$ を下回るものは一つも無かった。（証明終）

観察 3.2

この節では、分布を一度も使っていない。必要だったのは「分散が等しく、相関が無い」だけである。正規分布はどこにも現れなかった。

4. 芯：柵は線形性である

検算 4.1：誤差を自由度 5 の t 分布とする。分散は有限だから、ガウス＝マルコフは完全に成り立つ。 $n = 11$ 、200000 回の試行。

推定量	線形か	偏り	平均二乗誤差	平均に対する比
平均（最小二乗）	はい	0.000577	0.15233893	1.000000
中央値	いいえ	0.000948	0.15945434	1.046708
刈り込み平均	いいえ	0.000977	0.12773773	0.838510
フーバー推定	いいえ	0.000836	0.12848074	0.843387

（証明終）

観察 4.2

刈り込み平均とフーバー推定が平均に勝つ。しかもガウス＝マルコフは破れていない——平均はいまも線形なものの中では最良である。柵は正規性ではなく線形性であり、しかもその柵は、分布が話題になる前に立っていた。

観察 4.3

ただし「非線形なら勝つ」は偽である——中央値は同じ場面で負けている（1.0467 倍）。線形の外へ出ることは必要であって十分ではない。非線形であることが買うのは勝ちではなく、勝ちうる資格である。

検算 4.4：誤差を正規にして同じ比較をする。

推定量	平均二乗誤差	平均に対する比
平均	0.09078224	1.000000
中央値	0.13648426	1.503425
刈り込み平均	0.10137188	1.116649

(証明終)

観察 4.5

正規なら平均が勝つ。正規性がしていることは、平均を「線形の中で最良」から「すべての不偏推定量の中で最良」へ昇格させることである（クラメール＝ラオ）。「最良」は二つあり、一方だけが誤差則を要する。

5. 不偏と有効は別根である

検算 5.1：分散を不揃いにする ($\sigma_i^2 = i, i = 1, \dots, 11$)。

素の平均の分散	0.5454545455
逆分散重みの分散	0.3311392768
比	1.647206
素の平均の偏り（実測）	0.000952
逆分散重みの偏り（実測）	0.000498

(証明終)

観察 5.2

二つとも不偏であり、分散は 1.65 倍違う。不偏性と有効性は別の性質であって、後者を動かすのは分散のばらつきである。ガウス＝マルコフが要求した「等分散」は飾りではなく、そこが壊れれば結論も壊れる——ただし不偏性のほうは壊れない。

6. そして 2 は答に届かない

検算 6.1： $\sum (y_i - a)^2$ を最小にすると $-2 \sum (y_i - a) = 0$ となり、2 は割り切れて消える。二乗に定数を掛けても推定値は動かない。

掛ける定数	推定値
1	0.700000000000
2	0.700000000000
7	0.700000000000
100	0.700000000000
素の平均	0.700000000000

(証明終)

観察 6.2

「二乗」の 2 は推定量の中に無い。中にあるのは指数のほうの 2 であり、それは論文157 が扱った。二つの 2 は別物である。

7. 点呼

観察 7.1

「最良」の読み	定理	何を仮定するか	柵
線形不偏の中で最小分散	ガウス＝マルコフ 1821	分布仮定なし	線形性
すべての不偏の中で最小	クラメール＝ラオ	正規のとき	誤差則
最尤	誤差則ごとに別	誤差則を仮定	正規なら平均
頑健	M 推定・刈り込み	非線形	重い裾で勝つ

観察 7.2

「最小二乗は最良である」という一文は、四通りに読める。どれで読むかを言わないかぎり、その文は検証可能になっていない（論文164が「確率」について書いたのと同じ形）。

8. 結論

1. ガウスは一人で二つの定理を持つ（事実2.1）：**1809**は誤差則を仮定し、**1821**は仮定しない。
2. ガウス＝マルコフを乱数で直に確かめた（検算3.1）：**200000**通り中、 $1/n$ を下回るものは無し。
3. 柵は線形性である（検算4.1）：刈り込みで**0.8385**倍、フーバーで**0.8434**倍。
4. 非線形なら勝つ、は偽（観察4.3）：中央値は**1.0467**倍。
5. 不偏と有効は別根（検算5.1）：どちらも不偏で、分散は**1.65**倍。
6. 二乗の**2**は答に届かない（検算6.1）。

結び：仮定を一つも置かない議論など無い。ガウスは**1821**に誤差則の仮定を捨てたが、そのとき代わりに線形性を置いていた——置いたことが書かれていないだけである。「何も仮定していない」と聞いたら、探すべきは仮定の不在ではなく、書かれていない仮定である。

参考文献

1. Gauss, C. F. (1809). *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Hamburg: Perthes und Besser.
2. Gauss, C. F. (1821). *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*. Göttingen: Dieterich.
3. Markov, A. A. (1912). *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Leipzig: Teubner.
4. Aitken, A. C. (1936). *On least squares and linear combination of observations*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 55.
5. Huber, P. J. (1964). *Robust estimation of a location parameter*. Annals of Mathematical Statistics, 35(1).
6. Tukey, J. W. (1960). *A survey of sampling from contaminated distributions*. In: Contributions to Probability and Statistics. Stanford University Press.
7. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
8. 山岸勇輝 (2026). ゼロテンションと逆問題 [論文89]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21748664
9. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実を分ける [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
10. 山岸勇輝 (2026). ウィーナー・フィルタ [論文106]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836984
11. 山岸勇輝 (2026). フィッシャー計量の柵 [論文133]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080550

12. 山岸勇輝 (2026). 二乗の点呼 [論文157]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091931
13. 山岸勇輝 (2026). 「確率」は四つの住所を持つ [論文164]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092815
14. 山岸勇輝 (2026). 約分すると、**+1** ではなく **-1** が出る [論文170]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093731

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)