

小平の柵は正值性ではなく、整数性である

— ナッシュは何も仮定せず次元を払い、小平は仮定を課して射影空間を得る — [論文173]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文158 はナッシュを扱った——どんなリーマン多様体も等長に埋め込める、仮定は一つも要らない。小平の定理は逆の形をしている——射影空間への埋め込みは仮定が成り立つときにだけ存在し、その仮定は空虚ではない。新しい数学定理は主張しない。第一に、規約を確かめた。楕円曲線の積では、リーマンの第一関係式が 0 になり、エルミート形式の最小固有値は 2.2 と 1.8 である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。無作為に取った複素 2 次元トーラスに対し、成分が $| \cdot | \leq 2$ の整数交代形式を 15624 通り全数探索して、一つも通らなかった——第一関係式は最良でも 0.0139392、0.00445366、0.0273488 で、零に近づきさえしない（第3節）。第三に、背後にあるのは次元の勘定である。複素 2 次元トーラス全体は実 8 次元、アーベル曲面は実 6 次元——余次元 2。複素 1 次元では 2 対 2 であり、だから障害は複素 2 次元まで見えない（第4節）。第四に、柵の中身は整数性である。通る形式を 2, 3, 0.5, $\sqrt{2}$ 倍しても、第一関係式は 0 のまま、エルミート形式は正のままである——壊れるのは整数性だけである（第5節）。第五に、ナッシュは次元で払う。 $n(3n+11)/2$ は $n = 1, 2, 3, 4, 10$ で 7, 17, 30, 46, 205——二つは強さの階段ではない（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——小平の埋め込み定理、リーマンの関係式、一般の複素トーラスが代数的でないこと、ナッシュの埋め込み定理は、いずれも標準的である。また第3節の探索は有界である——示したのは「成分が 2 以下の整数形式は一つも通らない」ことであって、「偏極が存在しない」ことの証明ではない。その一般命題を担うのは第4節の次元の勘定であり、これは標準的な事実である。加えたのは偏極の探索を全数で行って数を出したこと、尺度を変えて「正值性は保たれ整数性だけが壊れる」と示したこと、ナッシュと小平の仮定・保つもの・受け皿を一枚に並べたことである。

1. 記法と位置づけ

複素 2 次元トーラスを $\mathbb{C}^2/\Lambda$ とし、周期行列を $\Omega = (I | Z)$ (Z は 2×2 複素行列) で表す。 Λ 上の整数交代形式 J (4×4 、独立成分は 6 個) に対し、リーマンの関係式は $\Omega J^{-1} \Omega^T = 0$ と、 $i \Omega J^{-1} \bar{\Omega}^T$ が正定値であることをい

う。符号は J と $-J$ のどちらを取るかの問題であって、条件の中身ではない（本稿では正になる向きを取る）。

位置づけ：論文158 はナッシュの埋め込みを扱い、内在と外在が双対でありながら別根であることを示した。本稿はその第二の声を置く——仮定を要求する側の埋め込みである。そして柵の中身は、論文146・147 が量子化について書いたものと同じ——整数性である。

2. 規約を確かめる

検算 2.1： Z が対角なら $\mathbb{C}^2/\Lambda$ は楕円曲線の積であり、射影的である。主偏極が両方の関係式を満たすはずである。

Z	第一関係式の大きさ	最小固有値
$\text{diag}(0.3 + 1.1i, 1.7i)$	0.0	2.2
$\text{diag}(2.0i, 0.5 + 0.9i)$	0.0	1.8

（証明終）

検算 2.2：主偏極に対する条件は「 Z が対称かつ $\text{Im } Z > 0$ 」である。

Z	第一関係式の大きさ	最小固有値
対称、 $\text{Im} > 0$	0.0	1.3801961
対称でない	0.583095	1.5168239

（証明終）

観察 2.3

第一関係式が要求しているのは、 Z の対称性である。

3. 芯：無作為なトーラスは、偏極を一つも持たない

検算 3.1：成分が -2 から 2 の整数交代形式を全数（ $5^6 - 1 = 15624$ 通り）作り、両方の関係式を満たすものを数える。

トーラス	探索幅	見つかった個数	第一関係式の最良値
対称な Z (アーベル曲面)	1	2	0.0
無作為な Z (標本1)	2	0	0.0139392
無作為な Z (標本2)	2	0	0.00445366
無作為な Z (標本3)	2	0	0.0273488

(証明終)

観察 3.2

アーベル曲面は $B = 1$ で直ちに見つかる。無作為な周期行列では 15624 通りがすべて外れ、第一関係式は零に近づきさえしない。

観察 3.3

ただしこの探索は有界である——示したのは「成分が 2 以下では通らない」ことであって、存在しないことの証明ではない。その一般命題は次節の勘定が担う。

4. 次元の勘定

事実 4.1

族	複素次元	実次元
複素 2 次元トーラス全体 (Z 任意)	4	8
アーベル曲面 (Z 対称、 $\text{Im } Z > 0$)	3	6
複素 1 次元トーラス全体	1	2
楕円曲線	1	2

観察 4.2

余次元 2 である。主偏極だけでなくすべての整数偏極を許しても、一つの部分集合が可算個の部分集合の和に置き換わるだけで、和はやはり測度零である。複素 2 次元以上のほとんどすべての複素トーラスは代数的でない。

観察 4.3

複素 1 次元では 2 対 2 である——どの 1 次元トーラスも楕円曲線であり、だから障害は複素 2 次元になるまで見えない。「見えない」と「無い」は別である（論文105 が 4 次元でだけ現れる例外を書いたのと同じ形）。

5. 柵の中身は整数性である

検算 5.1：通る偏極を正の数で尺度変換する。

倍率	第一関係式	最小固有値	整数か
1	0.0	1.3801961	はい
2	0.0	0.69009805	はい
3	3.8×10^{-32}	0.46006537	はい
0.5	0.0	2.7603922	いいえ
$\sqrt{2}$	7.8×10^{-32}	0.97594602	いいえ

(証明終)

観察 5.2

どの倍率でも第一関係式は零のままであり、エルミート形式は正のままである。壊れうるのは、成分が整数かどうかだけである。正值性は尺度変換で保たれ、整数性は保たれない——したがって柵は整数性である。

観察 5.3

ケーラー類は正でありながら $H^2(X, \mathbb{Z})$ の像に入らないことがあり、そのとき埋め込みは存在しない。論文146 が「貼り合わせが閉じることが量子化である」と書き、論文147 が「同じ H^2 でも係数が違えば量子化しない」と書いたのと、これは同じ柵である。

6. ナッシュと小平

事実 6.1

定理	仮定	保つもの	受け皿
ナッシュ 1956	無し	計量	$\mathbb{R}^N$ (N が伸びる)
小平 1954	正の直線束	複素構造	$\mathbb{P}^N$ 一種類

検算 6.2：ナッシュの払う次元 $n(3n + 11)/2$ 。

n	N
1	7
2	17
3	30
4	46
10	205

(証明終)

観察 6.3

二つは強さの階段ではない。ナッシュは何も要求しない代わりに、伸び続ける受け皿で払う。小平は条件を要求する代わりに、一種類の受け皿で済み、しかもそこでは像が多項式で切り出される——つまり「埋め込めた」ことの見返りが大きい。

観察 6.4

保つものも違う。ナッシュは計量を保ち、小平は複素構造を保つ——計量のほうは、フビニ=スタディの類までしか保たれない。「埋め込み」という一語が、二つの別のことを指している（論文158 が内在と外在について書いた区別の、もう一段先である）。

7. 点呼

観察 7.1

項目	内容	動かすと動くもの	注
ナッシュ	無条件	次元 N	計量を保つ
小平	正の直線束	整数性	複素構造を保つ
柵の中身	整数性	正值性ではない	尺度で壊れる
反例	一般の複素トーラス	複素次元 ≥ 2	余次元 2 ・測度零
見えない場合	複素 1 次元	常に代数的	楕円曲線

観察 7.2

「多様体は埋め込める」という一文は、どの構造を保つ埋め込みかを言わないかぎり、真偽を持たない。

8. 結論

- 規約を確かめた（検算2.1・2.2）：楕円曲線の積で第一関係式 0 、対称性が効いている。
- 無作為なトーラスは偏極を持たない（検算3.1）：**15624** 通りすべて外れ。
- 余次元 2 （事実4.1）：**8** 対 **6**、複素 1 次元では **2** 対 **2**。
- 柵は整数性である（検算5.1）：正值性は尺度で保たれ、整数性は壊れる。

5. ナッシュは次元で払う（検算6.2）： $n = 10$ で 205。

結び：ナッシュの定理は「できる」と言い、小平の定理は「このときにできる」と言う。条件のあるほうが弱いのではない——条件を払った分だけ、受け皿が良くなっている。そして払っている条件は、大きさでも滑らかさでもなく、整数であることであった。

参考文献

1. Kodaira, K. (1954). *On Kähler varieties of restricted type*. Annals of Mathematics, 60(1).
 2. Nash, J. (1956). *The imbedding problem for Riemannian manifolds*. Annals of Mathematics, 63(1).
 3. Riemann, B. (1857). *Theorie der Abel'schen Functionen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 54.
 4. Lefschetz, S. (1921). *On certain numerical invariants of algebraic varieties*. Transactions of the American Mathematical Society, 22.
 5. Siegel, C. L. (1939). *Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades*. Mathematische Annalen, 116.
 6. Griffiths, P., & Harris, J. (1978). *Principles of Algebraic Geometry*. New York: Wiley.
 7. 山岸勇輝 (2026). 曲率は内在的である [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
 8. 山岸勇輝 (2026). 4次元だけの例外 [論文105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
 9. 山岸勇輝 (2026). ディラックの弦は場ではなく、紙の上の痕である [論文146]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082868
 10. 山岸勇輝 (2026). 同じ H^2 でも、係数が違えば量子化しない [論文147]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083144
 11. 山岸勇輝 (2026). 住まいはあるが、住所ではない [論文158]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092143
 12. 山岸勇輝 (2026). 「不動点」は一つの定理ではない [論文161]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092530
 13. 山岸勇輝 (2026). 一意化が与えるのは「一つの形」ではなく、「一つの模型と、一つの径数」である [論文167]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093172
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)