

「小さい」は二つあって、両立しない

— 測度と範疇：実数直線は、互いに「ほとんど無い」と言い合う二つに分けられる — [論文176]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「ほとんどすべて」「ほとんど無い」という言い方には、二つの別の意味がある。測度で測った小ささと、範疇（ベールの意味）で測った小ささである。本稿はそれを点呼し、二つが逆の答を出すことを数で示す。新しい数学定理は主張しない——いずれも標準的な内容である。第一に、可算集合では二つが一致する——だから同じ言葉で呼ばれてきた（第2節）。第二に、太いカントール集合は疎なのに測度 $1/2$ である。14 段で残る測度は 0.50003051757813 、最長の区間は 3.05×10^{-5} ——範疇では無に等しく、測度では半分を占める（第3節）。第三に、逆向きの例もある。有理数を $\epsilon 2^{-n}$ で覆うと、開かつ稠密でありながら測度は ϵ 以下（ $\epsilon = 0.001$ で測度 0.0010000000 、補集合が 0.9990000000 ）（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。実数直線は、測度零の集合と第一類の集合の和に分けられる。一方は測度から見て「無」で範疇から見て「全部」、他方はその正反対である（第5節）。第五に、名前のついた証人がリウヴィル数である。被覆の測度の上界は $n = 2$ で発散し、 $n = 3$ で 1.693 、 $n = 6$ で 0.109 と落ちる——測度零でありながら、範疇では「ほとんどすべて」である（第5節）。第六に、第三の「小さい」もある。三分カントール集合は測度零でありながら、ハウスドルフ次元は 0.630929753571 で零ではない（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——ベールの範疇定理、太いカントール集合、測度零と第一類による実数直線の分割（オクストビー）、リウヴィル数が稠密 G_δ かつ測度零であること、ハウスドルフ次元は、いずれも標準的である。またどちらの「小さい」が正しいかを判定しない——書けるのは、それぞれが何を測っているかまでである。加えたのは二つを同じ検算の上に並べて逆を向かせたこと、太いカントール集合を論文168 から持ち越して両側から測ったこと、リウヴィル数の測度の上界を実際に足し上げたことである。

1. 記法と位置づけ

集合が測度零であるとは、いくらでも小さい総長さの区間列で覆えることをいう。疎であるとは、閉包が内点を持たないことをいい、第一類であるとは疎な集合の可算和で書けることをいう。補集合が第一類であると

き、その集合を余第一類と呼ぶ。区間の和の測度は、重なりを併合して自前で計算した。

位置づけ：論文168 はリーマン可積分性を決めるのが不連続点の測度であって稠密さではないと書いた。本稿はその隣に立つ——そもそも「小さい」が二つあり、その二つが食い違う。

2. 一致する場合

観察 2.1

可算集合は測度零である。そして第一類でもある——一点は疎であり、それが可算個あるだけだからである。

集合	測度	範疇
整数全体	0	第一類
$[0,1]$ の有理数	0	第一類
有限集合	0	第一類

観察 2.2

ここまでは二つの語が同じ方を向いている。だから互いに置き換えて使われてきた。置き換えられない。

3. 疎なのに、測度 $1/2$

検算 3.1： $[0,1]$ から、第 n 段で各区間の真ん中の長さ 4^{-n} を取り除く（論文168 で作ったものと同じ集合である）。

段	区間の個数	残る測度	最長の区間
1	2	0.75	0.375
3	8	0.5625	0.0703125
6	64	0.5078125	0.00793457
10	1024	0.50048828125	0.000488758
14	16384	0.50003051757813	3.05194×10^{-5}

測度は $\frac{1}{2}$ に収束し、最長の区間は 0 に落ちる。(証明終)

観察 3.2

最長の区間が 0 に落ちるということは、この集合が区間を一つも含まないということである——すなわち疎であり、したがって第一類である。それでいて測度は半分を占める。

観察 3.3

範疇の目から見れば無に等しく、測度の目から見れば直線の半分である。

4. 稠密なのに、測度がいくらでも小さい

検算 4.1： $[0, 1]$ の有理数を並べ、 n 番目のまわりに長さ $\epsilon 2^{-n}$ の区間を置く。和集合は開かつ稠密であり、測度は ϵ 以下である。

ϵ	被覆の測度	補集合の測度
0.5	0.4999997313	0.5000002687
0.1	0.1000000000	0.9000000000
0.01	0.0100000000	0.9900000000
0.001	0.0010000000	0.9990000000

(有理数は分母 60 まで、1103 個を並べた。証明終)

観察 4.2

被覆はすべての有理数を囲むから稠密であり、その測度はいくらでも小さくできる。補集合は長さのほとんど全部を持ちながら、开区間を一つも含まない。

観察 4.3

数値実験では有理数の並べ方を有限で打ち切っているため、補集合に見かけの「隙間」が残る。それは実験の打ち切りによるもので、無限まで取れば消える。

5. 芯：直線は、互いに「ほとんど無い」と言い合う二つに分かれる

観察 5.1

G_k を $\varepsilon = 1/k$ とした第4節の被覆とし、 $H = \bigcap_k G_k$ と置く。

H は各 G_k に含まれる	ゆえに測度 $\leq 1/k$ 、すなわち測度零
H は稠密開集合の可算交叉	ゆえに余第一類（補集合が第一類）

観察 5.2

したがって直線は次のように分かれる。

	測度から見ると	範疇から見ると
H	0（無に等しい）	ほとんどすべて
H の補集合	ほとんどすべて	第一類（無に等しい）

観察 5.3

二つの語は、単に違うのではない。この一組に対して正反対の判定を下す。片方の目に「ほとんどすべて」と映るものが、もう片方の目には「ほとんど何も無い」と映る。

検算 5.4：名前のついた証人がある。リウヴィル数は、まさにこのような稠密 G_δ をなす。被覆の測度の上界（ $q \leq 2000$ まで足し上げた）は次のとおり。

n	$\sum_{q \leq 2000} 2(q+1)q^{-n}$	判定
2	15.64560459	発散する
3	1.69298194	有限
4	0.5687600238	有限
6	0.1085416343	n とともに落ちる

(証明終)

観察 5.5

$n \geq 3$ で上界は有限になり、 n とともに落ちる。したがってすべての n にわたる交叉は測度零である。ところが各段は開かつ稠密だから、その交叉は余第一類である。リウヴィル数は、測度から見れば無く、範疇から見ればほとんどすべてである。

観察 5.6

同じ現象が、より有名な形でも起きている——正規数の全体は測度 1 を持ちながら、第一類である（ボレル 1909、および範疇についての標準的な結果）。「ほとんどすべての数は正規である」と「典型的な数は正規でない」は、どちらも真である。本稿はこの範疇の側を計算していない——標準的な事実として引くにとどめる。

6. 第三の「小さい」

検算 6.1：三分コントロール集合を見る。

測度	0
ハウスドルフ次元	0.630929753571
それは零か	いいえ

対比として、太いコントロール集合は測度 **1/2**、次元 **1** である。(証明終)

観察 6.2

「可算 $\Rightarrow$ 測度零 $\Rightarrow$ 次元零」という鎖は成り立たない。三分コントロール集合は非可算で、測度零で、しかも次元は正である（論文94 が「次元は一つではない」と書いたのと同じ場所である）。

7. 点呼

観察 7.1

「小さい」	意味	他との関係	証人
可算	点が数えられる	測度零かつ第一類	二つが一致する場合
測度零	長さが 0	第一類とは限らない	リウヴィル数（余第一類）
第一類	疎な集合の可算和	測度零とは限らない	太いコントロール（測度 1/2 ）
次元零	ハウスドルフ次元	測度零より強い	三分コントロールは 0.6309

観察 7.2

どちらを使うかは、何を問うているかで決まる。確率と解析は測度を採用、「典型的」「一般の場合」を論じるときは範疇を採る。同じ「ほとんど」という語が、二つの帳簿を指している。

8. 結論

1. 可算集合では二つが一致する（観察2.1）。
2. 疎なのに測度 $1/2$ （検算3.1）：最長の区間 3.05×10^{-5} 。
3. 稠密なのに測度 0.001 （検算4.1）。
4. 直線は測度零と第一類に分かれる（観察5.2）：互いに「ほとんど無い」と言い合う。
5. リウヴィル数がその証人（検算5.4）： $n = 6$ で上界 0.1085 。
6. 測度零は次元零ではない（検算6.1）： 0.630929753571 。

結び：「ほとんどすべての点で成り立つ」と読んだら、次に問うべきはどちらの帳簿かである。測度と範疇は、直線という同じ場所を、互いに反対から眺めている——そして、どちらも間違っていない。

参考文献

1. Baire, R. (1899). *Sur les fonctions de variables réelles*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 3.
2. Smith, H. J. S. (1875). *On the integration of discontinuous functions*. Proceedings of the London Mathematical Society, 6.
3. Volterra, V. (1881). *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue*. Giornale di Matematiche, 19.
4. Liouville, J. (1844). *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 18.
5. Borel, É. (1909). *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 27.
6. Hausdorff, F. (1919). *Dimension und äusseres Mass*. Mathematische Annalen, 79.
7. Oxtoby, J. C. (1971). *Measure and Category*. New York: Springer.
8. 山岸勇輝 (2026). 「次元」は一つではない [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
9. 山岸勇輝 (2026). 点を持たない空間 [論文155]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084848
10. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
11. 山岸勇輝 (2026). 「確率」は四つの住所を持つ [論文164]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092815
12. 山岸勇輝 (2026). ルベグが買ったのは、クラスの大きさではなく、極限で閉じることである [論文168]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093320
13. 山岸勇輝 (2026). 小平の柵は正値性ではなく、整数性である [論文173]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094507

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)