

量子子の順序が、中身のすべてである

—「連続」の五別根と、 δ が ε に答える形：柵はコンパクト性である—[論文177]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

各点連続と一様連続は、 $\forall$ と $\exists$ を入れ替えただけで別物になる。本稿は「連続」を五つに点呼し、 δ が ε に答える形が、種類そのものであることを数で示す。新しい数学定理は主張しない——いずれも標準的な内容である。第一に、 $1/x$ を $(0,1)$ で取ると $\delta(x) = x^2\varepsilon/(1+x\varepsilon)$ である（実測が予測と全桁一致）。 $x = 0.002$ で $\delta = 4.0 \times 10^{-7}$ ——下限は0に落ち、一様連続にならない（第2節）。第二に、柵はコンパクト性である。同じ関数を $[a,1]$ に載せると下限は a が何であれ正になる（ $a = 0.001$ でも 1.0×10^{-7} ）（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。 $\log \delta$ を $\log \varepsilon$ に対して測った傾きは、ヘルダー指数の逆数そのものである—— $2x+1$ で1.0、 x^2 で1.00054、 $\sqrt{x}$ で2.0、 $x^{1/3}$ で3.0（第4節）。第四に、どの冪よりも悪い連続もある。 $1/\log(1/x)$ の δ は $\varepsilon = 0.05$ で 2.06×10^{-9} 、すなわち $e^{-1/\varepsilon}$ と全桁一致する——一様連続でありながら、どのヘルダー指数も持たない（第5節）。第五に、そしてこれがブレーキである。一様連続は絶対連続ではない。カントール関数はすべての隙間で傾き0でありながら、ちょうど1だけ上がる（隙間の総長0.99999986）（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない—— ε - δ の定式化、ハイネ＝カントールの定理、ヘルダー連続、カントール関数が絶対連続でないことは、いずれも標準的である。また ε - δ を批判しない——示すのは、その定義がどれだけ多くを区別しているかである。加えたのは δ の下限を実際に測って落ち方を出したこと、 $\log \delta$ 対 $\log \varepsilon$ の傾きがヘルダー指数の逆数に一致することを数値で確かめたこと、どの冪よりも悪い連続の δ を測ったこと、カントール関数の隙間で傾きが0であることと隙間の総長を並べたことである。

1. 記法と位置づけ

f が点 x で連続であるとは、任意の x について、任意の ε について、ある δ が存在して、 $|y-x| < \delta$ なら $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ となることをいう。一様連続であるとは、任意の ε について、ある δ が存在して、任意の x について同じことが成り立つことをいう。語は同じで、 $\forall x$ と $\exists \delta$ の順序だけが違う。 δ は二分法で測った。

位置づけ：論文171 は最小二乗の柵が線形性であると書き、論文173 は小平の柵が整数性であるとした。本稿はその三本目である——柵はコンパクト性である。なお論文154 が扱ったのは極限操作の順序であり、本稿が扱うのは量子子の順序である——別の順序であるから、衝突しない。

2. $\forall$ と $\exists$ を入れ替えると、別の性質になる

検算 2.1： $f(x) = 1/x$ を开区間 $(0, 1)$ で取り、 $\varepsilon = 0.1$ に対する δ を各点で測る。

x	実測した $\delta(x)$	$x^2\varepsilon/(1+x\varepsilon)$
0.9	0.0743119266055	——
0.5	0.0238095238095	0.0238095238095
0.2	0.00392156862745	——
0.05	0.000248756218905	0.000248756218905
0.01	$9.99000999001 \times 10^{-6}$	$9.99000999001 \times 10^{-6}$
0.002	$3.99920015997 \times 10^{-7}$	——

実測と閉じた式が全桁で一致する。(証明終)

観察 2.2

x が 0 に近づく と δ は x^2 のように落ちる。すべての x に同時に効く一つの δ は存在しない。

観察 2.3

したがって f はどの点でも連続であり、一様連続ではない。関数は何も変えていない——量子子を並べ替えただけである。

3. 柵はコンパクト性である

検算 3.1： 同じ関数を閉区間 $[a, 1]$ に載せ、401 点で δ の下限を測る。

a	δ の下限
0.5	0.0263157894737
0.1	0.0010101010101
0.01	$1.001001001 \times 10^{-5}$
0.001	$1.00010001 \times 10^{-7}$

a が何であれ、下限は厳密に正である。(証明終)

観察 3.2

これがハイネ＝カントールの定理である——コンパクト集合の上では、連続は自動的に一様連続になる。柵はコンパクト性であり、0 の側が開いていることが、それを壊していた唯一の原因である。

4. 芯： δ が ε に答える形が、種類そのものである

検算 4.1：一様連続な関数について、 $\log \delta$ を $\log \varepsilon$ に対して測った傾きを出す。

関数	$\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ での δ	傾き	種類
$2x + 1$	0.005, 0.0005, 5×10^{-5}	1.0	リプシッツ
x^2	0.00501256, 0.000500125, 5.00013×10^{-5}	1.00054	リプシッツ
$\sqrt{x}$	$10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$	2.0	ヘルダー 1/2
$x^{1/3}$	$10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$	3.0	ヘルダー 1/3

(証明終)

観察 4.2

傾きは、ヘルダー指数の逆数そのものである。リプシッツなら 1、ヘルダー 1/2 なら 2、1/3 なら 3。

観察 4.3

δ が ε にどう答えるかは、証明の細部ではない——それが分類そのものである。「連続だ」と言うとき、答え方の速さまで言っていることになる。

5. どの冪よりも悪く、それでも一様連続

検算 5.1 : $f(x) = 1/\log(1/x)$ ($f(0) = 0$ と定める) を $[0, 1/2]$ で取る。

ε	0 の近くでの δ	$e^{-1/\varepsilon}$
0.5	0.1353352832	0.1353352832
0.2	0.006737946999	0.006737946999
0.1	$4.539992976 \times 10^{-5}$	$4.539992976 \times 10^{-5}$
0.05	$2.061153622 \times 10^{-9}$	$2.061153622 \times 10^{-9}$

全桁で一致する。(証明終)

観察 5.2

δ は $e^{-1/\varepsilon}$ のように落ちる——どんな k に対しても ε^k より速い。一様連続でありながら、ヘルダー指数を一つも持たない。「一様」は「冪で答える」を意味しない。

6. ブレーキ：一様連続は、絶対連続ではない

観察 6.1

カントール関数は $[0, 1]$ で連続であり、したがって一様連続である。そして 0 から 1 まで上がる。

検算 6.2 : 取り除かれた真ん中の区間の上で、差分商を測る。

隙間	左端での f	右端での f	傾き
$1/3 \sim 2/3$	0.5	0.5	0
$1/9 \sim 2/9$	0.25	0.25	0
$7/9 \sim 8/9$	0.75	0.75	0
$1/27 \sim 2/27$	0.125	0.125	0

検算 6.3：その隙間の総長。

$\sum_{n \geq 1} 2^{n-1}/3^n$ (40 段まで)	0.99999986434341
$f(1) - f(0)$	1.0

(証明終)

観察 6.4

隙間は測度 1 を埋め尽くす。したがって $f' = 0$ がほとんど至るところで成り立ち、それでいて f はちょうど 1 だけ上がる。 f' の積分は 0、上がり幅は 1——微分積分学の基本定理が成り立たない。

観察 6.5

一様連続では足りなかった。必要なのは絶対連続であり、カントール関数はその差の標準的な証人である。

観察 6.6

これは論文168 と矛盾しない。論文168 が「ゲージ積分はすべての導関数を復元する」と書いたのは、至るところ微分可能な関数についてである。カントール関数はカントール集合の上で微分可能でないから、その定理の仮定を満たしていない。定理の柵は、ここでも効いている。

観察 6.7

そして「ほとんど至るところ」という語は、論文176 の意味で読むべきである——ここで消えているのは測度であって、範疇ではない。

7. 点呼

観察 7.1

種類	量子化／形	分離子	証人
各点連続	$\forall x \forall \varepsilon \exists \delta$	δ が x に依ってよい	$1/x$ on $(0, 1)$
一様連続	$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x$	δ が x に依らない	コンパクトなら自動
ヘルダー	$\delta \propto \varepsilon^{1/\alpha}$	冪で答える	$\sqrt{x}$ は傾き 2
リプシッツ	$\delta \propto \varepsilon$	線形に答える	傾き 1
絶対連続	区間の和で言う	基本定理が成り立つ	カントール関数が反例

観察 7.2

五つは強さの階段である——ただし一段ごとに理由が違う。一段目と二段目を分けるのは量子化の順序、二段目と三段目を分けるのは答え方の速さ、四段目と五段目を分けるのは基本定理が成り立つかどうかである。

8. 結論

- 1. δ の下限は 0 に落ちる（検算2.1）： $x = 0.002$ で 4.0×10^{-7} 、閉じた式と全桁一致。
- 2. 柵はコンパクト性（検算3.1）： $[a, 1]$ では a が何であれ下限は正。
- 3. 傾きはヘルダー指数の逆数（検算4.1）：1.0／2.0／3.0。
- 4. どの冪よりも悪い一様連続がある（検算5.1）： $\delta \simeq e^{-1/\varepsilon}$ 。

5. 一様連続は絶対連続でない（検算6.2・6.3）：傾き 0 のまま 1 だけ上がる。

結び： ϵ - δ は、読みにくい形式ではなく、区別を運ぶ器である。どこに $\forall$ を置き、どこに $\exists$ を置くか——その一箇所の違いが、五つの別々の性質を切り分けている。形式が煩わしく見えるとき、たいていは、その形式が守っている区別のほうを見ていない。

参考文献

1. Bolzano, B. (1817). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Prague: Gottlieb Haase.
2. Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris: Imprimerie Royale.
3. Heine, E. (1872). *Die Elemente der Functionenlehre*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 74.
4. Cantor, G. (1883). *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten V*. Mathematische Annalen, 21.
5. Vitali, G. (1905). *Sulle funzioni integrali*. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, 40.
6. Lebesgue, H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars.
7. 山岸勇輝 (2026). 「次元」は一つではない [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
8. 山岸勇輝 (2026). モジュールは壁ではなく、極限である [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
9. 山岸勇輝 (2026). 極限には順序が要る [論文154]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084647
10. 山岸勇輝 (2026). 点を持たない空間 [論文155]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084848
11. 山岸勇輝 (2026). ルベークが買ったのは、クラスの大きさではなく、極限で閉じることである [論文168]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093320
12. 山岸勇輝 (2026). 最小二乗を囲っている柵は、正規分布ではなく線形性である [論文171]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094287
13. 山岸勇輝 (2026). 小平の柵は正值性ではなく、整数性である [論文173]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094507
14. 山岸勇輝 (2026). 「対称性の破れ」は一語ではない [論文175]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22097873

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)