

「構成できない」にも別根がある

— 平均・選択・計算不能：分離子は「どこまで探せるか」である — [論文179]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文163は「在る」と「これだ」を分けた。本稿はその先を問う——なぜ書き下せないのか。理由は少なくとも三つあり、どこまで探せるかで分かれる。新しい数学定理は主張しない——いずれも標準的な内容である。第一に、平均の議論では原理的に探せる。シャノンが平均を取る集合は有限であり、 $n = 32$ 、 $k = 16$ でおよそ 2^{511} 個——天文学的だが、有限の一覧である。障害は実用上のものにすぎない（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。選択公理を要する病的な加法関数は、可算な部分では選択公理なしに厳密に構成できる。 $f(a + b\sqrt{2}) = a$ は加法性を厳密に満たし（有理数演算で確認）、 $|x| = 0.0193$ の点で $|f(x)| = 181$ に達する（第3節）。第三に、では選択公理は何のためか。 $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ は可算である。非可算個の有理直線すべてに値を選ぶところ——そこだけに要る（第3節）。第四に、柵は区間上の有界性である。加法性是有理数倍を無料で与えるが、直線どうしの関係は与えない（第4節）。第五に、第三の根は計算不能である。ビジービーバーを全数探索すると $n = 1$ で $S = 1 \cdot \Sigma = 1$ （64 台）、 $n = 2$ で $S = 6 \cdot \Sigma = 4$ （20736 台）——既知値と一致した。そして「ビジービーバー」という一語もまた、歩数と個数という二つの数列を指している（第5節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——コーシーの関数方程式、ハメル基底、可測な解が線形であること、ビジービーバー関数の計算不能性は、いずれも標準的である。また選択公理の是非を判定しない——書けるのは、それがどこで要るかまでである。論文163との関係：163は「存在と構成は別の文である」を示した。本稿はその非構成性の理由自体が複数あることを示す——163の非構成性は平均であり、本稿の第2の根は選択である。加えたのは三つを「探索可能性」という一つの尺度に並べたこと、病的な加法関数を可算な部分で厳密に構成して「選択公理が要るのは延長だけ」と示したこと、ビジービーバーを全数探索して既知値と突き合わせたことである。

1. 記法と位置づけ

対象が存在するとは、それを含む集合が空でないことをいう。構成できるとは、それを一つ書き下す手続きがあることをいう。本稿では前者から後者へ渡れない理由を三つに分ける。有理数の計算はすべて厳密な分数演算で行った。

位置づけ：論文25 は「解けない」を三つに分け、分離子が許した道具であると言った。本稿は隣の語を分ける——あちらは方程式を解く話、こちらは対象を書き下す話である。

2. 平均の議論：原理的には探せる

観察 2.1

シャノンの符号化定理は、すべての符号にわたって平均を取り、符号を一つも名指ししない（論文163）。だが平均を取る集合は有限である。

検算 2.2：GF(2) 上の線形符号の個数。

n	k	符号の個数
8	3	約 2^{23}
16	8	約 2^{127}
32	16	約 2^{511}

(証明終)

観察 2.3

天文学的な数だが、有限の一覧である。全部調べれば必ず終わる。障害は実用上のものであって、書き下すことを禁じているものは何も無い。

3. 芯：選択公理は、どこで要るのか

観察 3.1

コーシーの関数方程式 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を考える。加法性だけから、あらゆる有理数 q について $f(qx) = qf(x)$ が従う。したがって f は各「有理直線」の上で決まってしまう、直線どうしは独立に扱える。

検算 3.2： $a + b\sqrt{2}$ (a, b は有理数) の形の数を取り、 $f(a + b\sqrt{2}) = a$ と定める。これは厳密な分数演算であり、選択公理を一切使わない。

x	y	$f(x+y) - f(x) - f(y)$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\sqrt{2}$	0
$\frac{7}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{2}$	$-\frac{4}{9} + \frac{5}{2}\sqrt{2}$	0
$\sqrt{2}$	1	0

厳密に加法的である。(証明終)

検算 3.3：しかもこの f は、すでに激しく不連続である。

x	$ x $	$ f(x) $
$-11 + 8\sqrt{2}$	0.313708	11
$-45 + 32\sqrt{2}$	0.254834	45
$-181 + 128\sqrt{2}$	0.019336	181
$-724 + 512\sqrt{2}$	0.0773439	724

(証明終)

観察 3.4

引数が 0 に近づくのに、値は際限なく大きくなる。 f はどの区間の上でも有界でなく、直線とは似ても似つかない。

観察 3.5

では選択公理は何のために要するのか。 $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ は可算である。この f を実数全体の上で持つには、非可算個の有理直線それぞれに値を選ばねばならない。病的な関数は可算な部分では構成できており、選択公理が要るのは延長のところだけである。

観察 3.6

そしてこの非構成性は、第2節のものと種類が違う。符号は有限の一覧から選べる。ここには一覧が無い——ソロヴェイ（1970）は、選択公理を弱めれば「すべての集合が可測」が無矛盾になりうることを示した。つまり、この f は探し方が悪いのではなく、探す場所が無いのである。

4. 柵は、区間上の有界性である

観察 4.1

加法性は有理数倍を無料で与える。 $f(qx) = qf(x)$ は、どの有理数 q についても成り立つ。

観察 4.2

与えないのは、有理直線どうしの関係である。ある区間の上で有界だという条件を一つ足すだけで、直線どうしが縛られ、 $f(x) = cx$ に潰れる（フレシェ、バナッハ、シェルピンスキー）。

観察 4.3

したがって第3節の f が線形にならずに済んだのは、どの区間の上でも有界でないからである。それは可測でないということであり、論文176 の言葉でいえば、測度の目から見て手に負えないということである。

5. 第三の根：定義はできるが、算法が無い

観察 5.1

ビジービーバーは、空白テープから始めて停止する n 状態機械のうち、最も長く走るもの（あるいは最も多くの 1 を残すもの）を指す。定義は完全に明確であり、しかも計算可能関数のどれよりも速く増える。

検算 5.2：小さい n については全数探索できる。

n	$S(n)$ (歩数)	$\Sigma(n)$ (1 の個数)	調べた機械
1	1 (既知値と一致)	1 (一致)	64
2	6 (一致)	4 (一致)	20736

(証明終)

観察 5.3

ここで一語が二つを指していることに注意したい。「ビジービーバー」は歩数の数列と 1 の個数の数列の両方に使われ、両者は別の数列である。

n	$S(n)$ (歩数)	$\Sigma(n)$ (個数)
1	1	1
2	6	4
3	21	6
4	107	13
5	47176870	4098
6	未知	未知

$n \geq 3$ の値は引用であり、本稿では計算していない。

観察 5.4

どの n についても値は存在する。それを全部出す算法は無い——あれば停止問題が解けてしまうからである（チューリング 1936、ラドー 1962）。定義できて、計算できない。

観察 5.5

これは第2節とも第3節とも違う。符号は有限の一覧から選べ、病的な f には一覧が無く、ビジービーバーの値は一つ一つなら求まるのに、全部を出す手続きが無い。

6. 点呼

観察 6.1

非構成の理由	何が足りないか	どこまで探せるか	証人
平均の議論	名指しの手続き	原理的には探せる	シャノンの符号（論文163）
選択公理	非可算個の選択	探す場所が無い	病的な加法関数
計算不能	一様な算法	個別には求まる	ビジービーバー

観察 6.2

三種類の基底は、この三つに散らばっている。

基底	存在の根拠	書き下せるか
正規直交基底	グラム＝シュミット	できる（算法がある）
シャウダー基底	空間ごとの構成	できることが多い
ハメル基底	選択公理	一つも書き下せない

観察 6.3

「構成的でない」という一語が、三つの違う事情を指している。分離子はどこまで探せるかであり、それは証明の書き方ではなく、対象の側の性質である。

7. 結論

1. 平均の議論では有限の一覧が残る（検算2.2）： 2^{511} 個でも有限。
2. 病的な加法関数は可算な部分で厳密に構成できる（検算3.2）：差はすべて0。
3. それは激しく不連続である（検算3.3）： $|x| = 0.0193$ で $|f(x)| = 181$ 。
4. 選択公理が要るのは延長のところだけ（観察3.5）。
5. ビジービーバーは全数探索で既知値と一致した（検算5.2）： $S(2) = 6$ 、 $\Sigma(2) = 4$ 。
6. その名も一語で二つを指す（観察5.3）。

結び：「構成的でない」と言われたとき、次に問うべきは探せば見つかるのかである。探せば見つかるが遠いのか、探す場所そのものが無いのか、一つずつなら見つかるが全部は無理なのか——三つとも同じ言葉で片づけ

られ、事情はまるで違う。

参考文献

1. Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris: Imprimerie Royale.
2. Zermelo, E. (1904). *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*. Mathematische Annalen, 59.
3. Hamel, G. (1905). *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$* . Mathematische Annalen, 60.
4. Sierpiński, W. (1920). *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$* . Fundamenta Mathematicae, 1.
5. Turing, A. M. (1936). *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. Proceedings of the London Mathematical Society, 42.
6. Radó, T. (1962). *On non-computable functions*. Bell System Technical Journal, 41(3).
7. Solovay, R. M. (1970). *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*. Annals of Mathematics, 92(1).
8. 山岸勇輝 (2026). 「解けない」は三つの別根を持つ [論文25]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090297
9. 山岸勇輝 (2026). 点を持たない空間 [論文155]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084848
10. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
11. 山岸勇輝 (2026). 「確率」は四つの住所を持つ [論文164]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092815
12. 山岸勇輝 (2026). 「小さい」は二つあって、両立しない [論文176]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22097994
13. 山岸勇輝 (2026). デルタは関数ではなく、写像である [論文178]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098261

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)