

「古典極限」は一つの極限ではない

— 方程式・スペクトル・波動関数・状態：分離子は「何が古典になれと言われているか」 — [論文

180]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文113は「量子力学は古典力学の $\hbar$ による変形であり、 $\hbar \rightarrow 0$ で古典代数に戻る」と書いた。それは構造についての言明である。本稿は隣の問いを立てる——では振る舞いは戻るのか。二つは別の文であり、後者には答えが複数ある。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、方程式。 $\langle V'(\mathbf{x}) \rangle = V'(\langle \mathbf{x} \rangle)$ が厳密なのは V が二次までのときだけである。三次では隔たりが σ^2 、四次では $3\mu\sigma^2$ ちょうどであった（第2節）。第二に、スペクトル。水素で $n \rightarrow n-1$ の振動数と古典の公転振動数の比は3.0、1.40625、1.0015020025と近づき、近づき方は $1 + 3/(2n)$ である。この比に $\hbar$ は一度も現れない——これは「 $\hbar$ が小さい」ではなく「量子数が大きい」という別の文である（第3節）。第三に、波動関数。同じボーア=ゾンマーフェルトの処方が、調和振動子ではどの n でも厳密（誤差0）、四次では厳密でなく n とともに 1.8×10^{-1} から 2.2×10^{-5} へ改善する（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。 $\hbar \rightarrow 0$ と $t \rightarrow \infty$ は交換しない。時刻を $t=2$ に固定すると差は $0.1762 \rightarrow 0.1050 \rightarrow 0.0581 \rightarrow 0.0307$ と $\hbar$ に比例して消える。ところが $\hbar=0.1$ に固定して待つと、振れ幅は1.5から0.000195へ潰れ、 $t=199.85$ で0.664へ戻ってきた——古典軌道は1.4986から一度も動いていない（第5節）。第五に、それでも存続時間は有限である。 $8.16 \rightarrow 10.64 \rightarrow 14.28 \rightarrow 19.20$ と伸びるが、伸び方は $\hbar^{-0.41}$ の冪則にとどまる（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない——エーレンフェストの定理、ボーアの対応原理、WKB近似、波束の崩壊と再生は、いずれも標準的である。量子力学の解釈を判定しない。論文113との関係：113は代数が戻ることを書いた。本稿は振る舞いが戻るかを問う——ブレーキであって反論ではない。論文154との関係：「二つの極限が交換しない」という型は154が既に持っている（キュリー=ワイス磁石）。本稿の第5節はその再演であり、新しい型ではない——加えたのは、その型が量子と古典の境目にも現れることである。加えたのは四つを一つの分離子に並べたこと、エーレンフェストの隔たりを閉じた形で書いて $\hbar$ 比例を数で確かめたこと、対応原理の近づき方を測ったこと、同じWKBの処方が一方で厳密・他方で漸近であることを並べたこと、崩壊と再生を基底の倍化に耐える精度で測ったことである。

1. 記法と位置づけ

以下、 $H = p^2/2 + V(x)$ 、質量は **1** とする。数値はすべて自前の計算であり、行列の対角化は基底を倍にして答えが動かないことを確かめてから引用した（動いた値は載せていない）。古典の軌道は自前のルンゲ＝クッタ法で解いた。

位置づけ：論文113 は「モジュールは壁ではなく極限である」と書き、量子と古典を $\hbar$ による変形で結んだ。本稿はその隣に立つ——代数が戻ることと、振る舞いが戻ることは、別の文である。

2. 方程式：エーレンフェストが厳密でなくなる場所

観察 2.1

$\langle p \rangle$ の時間変化は $-\langle V'(x) \rangle$ に厳密に等しい。古典の式は $-V'(\langle x \rangle)$ である。両者が一致するのは V' が線形のとき、すなわち V が二次までのときに限る。

検算 2.2：平均 $\mu = 0.7$ 、標準偏差 $\sigma = 0.35$ のガウス波束で隔たりを測る。

$V(x)$	$V'(x)$	隔たり	予測
$x^2/2$	x	0	0
$x^3/3$	x^2	0.1225	$\sigma^2 = 0.1225$
$x^4/4$	x^3	0.25725	$3\mu\sigma^2 = 0.25725$

(証明終)

観察 2.3

隔たりを作っているのは波束の幅である。そして幅こそが $\hbar$ の入り口である——最小不確定の波束では $\sigma^2 = \hbar/2$ だから、隔たりは $\hbar$ に比例する。

$\hbar$	$\sigma^2 = \hbar/2$	隔たり $3\mu\sigma^2$
1	0.5	1.05
0.01	0.005	0.0105
0.0001	0.00005	0.000105

(証明終)

観察 2.4

したがって時刻を固定すれば $\hbar \rightarrow 0$ で古典の式に戻る。この但し書きを覚えておきたい——第5節で、時刻を固定しない場合に同じ言明が破れる。

3. スペクトル：ボア自身の対応原理と、その近づき方

観察 3.1

ボア（1913、1920）は、量子数が大きいとき $n \rightarrow n - 1$ の遷移で放射される振動数が古典の公転振動数に近づくと述べた。水素をリュードベリ単位で書けば $E_n = -1/n^2$ であり、遷移振動数は $1/(n - 1)^2 - 1/n^2$ 、 n 番目の準位での古典の公転振動数は $2/n^3$ である。

検算 3.2

n	量子 ($n \rightarrow n - 1$)	古典 ($2/n^3$)	比
2	0.75	0.25	3.0
5	0.0225	0.016	1.40625
10	0.00234567901235	0.002	1.17283950617
100	$2.03040506071 \times 10^{-6}$	2.0×10^{-6}	1.01520253035
1000	$2.00300400501 \times 10^{-9}$	2.0×10^{-9}	1.0015020025
10000	$2.00030004001 \times 10^{-12}$	2.0×10^{-12}	1.00015002

(証明終)

検算 3.3：近づき方は $1 + 3/(2n)$ である。

n	比 -1	$3/(2n)$
10	0.1728395062	0.15
100	0.01520253035	0.015
1000	0.001502002503	0.0015
10000	0.0001500200025	0.00015

(証明終)

観察 3.4

この比のどこにも $\hbar$ が現れていない。対応原理は「 $\hbar$ が小さい」という言明ではなく、「量子数が大きい」という言明である——第2節の $\hbar \rightarrow 0$ とは別の文なのである。

検算 3.5：しかも一本の振動数の話ですらない。 $n \rightarrow n - k$ は公転の第 k 高調波に対応する。

遷移 ($n = 1000$)	古典側	比
$n \rightarrow n - 1$	基本波	1.0015020025
$n \rightarrow n - 2$	第二高調波	1.00300802005
$n \rightarrow n - 3$	第三高調波	1.00451806774

対応しているのはフーリエ級数の全体である。(証明終)

4. 波動関数：同じ処方が、厳密でも漸近でもある

観察 4.1

ボーア＝ゾンマーフェルトの量子化条件に $1/2$ を加えたもの（マスロフ指数）を、二つの井戸に同じ形で当てる。

検算 4.2：調和振動子 $H = p^2/2 + x^2/2$ 。

n	WKB	行列の固有値	誤差
0	0.5	0.5000000000000000	0
1	1.5	1.5000000000000000	0
5	5.5	5.5000000000000000	0
20	20.5	20.5000000000000000	0

基底状態を含め、どの n でも厳密である。（証明終）

検算 4.3：四次の井戸 $H = p^2/2 + x^4$ 。基底の大きさを 100、200、400 と上げても $E_0 = 0.66798625915578$ は 10^{-14} しか動かない。

n	WKB	行列の固有値	相対誤差
0	0.54626732507809	0.667986259156	1.822×10^{-1}
1	2.3635614446006	2.393644016466	1.257×10^{-2}
5	13.363764206125	13.379336552631	1.164×10^{-3}
10	31.649312728425	31.659456477223	3.204×10^{-4}
40	191.44847701265	191.452604854688	2.156×10^{-5}

（証明終）

観察 4.4

「準古典」も一つの条件ではない。一方の井戸では全ての n で厳密であり、他方では n について漸近的でしかない。同じ処方が、井戸によって別のことを意味している。

5. 芯： $\hbar \rightarrow 0$ と $t \rightarrow \infty$ は交換しない

観察 5.1

四次の井戸に、 $x_0 = 1.5$ で静止した波束を置く。古典側は $\ddot{x} = -4x^3$ を自前のルンゲ＝クッタ法で解く。

検算 5.2：時刻を $t = 2$ に固定して $\hbar$ を下げる。

$\hbar$	量子 $\langle x \rangle(2)$	古典 $x(2)$	差
0.4	0.640102912023	0.463905500086	1.762×10^{-1}
0.2	0.568908324699	0.463905500086	1.050×10^{-1}
0.1	0.521994255976	0.463905500086	5.809×10^{-2}
0.05	0.494576155187	0.463905500086	3.067×10^{-2}

$\hbar$ を半分にすると差も半分になる——第2節の閉じた形（隔たりは $\hbar$ に比例）と合う。各行は基底を倍にしても 10^{-14} しか動かない。（証明終）

検算 5.3：今度は $\hbar = 0.1$ に固定して待つ。

t	量子の振れ幅	古典の振れ幅
0	1.500000	1.500000
10	0.482629	1.499910
20	0.014062	1.499426
40	0.001587	1.499486
120	0.022298	1.498760
200	0.664054	1.498946
240	0.289268	1.498613

最も深く潰れたのは $t = 27.50$ の **0.000195**、最も強く戻ったのは $t = 199.85$ の **0.664054** であった。（証明終）

観察 5.4

振れ幅は戻ってくる。古典の軌道は潰れも戻りもせず、**1.4986** から一度も動いていない。したがってこれは軌道への小さな補正ではない。潰れも再生も、準位の間隔が一樣でないことから来る——古典の側には対応するものが何も無い。

観察 5.5

並べればこうである。

取る順序	結果
t を固定して $\hbar \rightarrow 0$	古典に戻る（検算5.2）
$\hbar$ を固定して $t \rightarrow \infty$	戻らない（検算5.3）

この型は本体系の新顔ではない。論文154 が「二つの極限が交換しない」を主題にし、キュリー＝ワイス磁石で **0** と **0.957504** を並べている。本稿が加えたのは、同じ型が量子と古典の境目にも現れるということだけである。

6. それでも存続時間は有限である

検算 6.1：振れ幅が最初の十分の一を切るまでの時間を測る。

$\hbar$	存続時間	基底を倍にした移動
0.4	8.160	4.5×10^{-11}
0.2	10.640	2.7×10^{-11}
0.1	14.280	1.4×10^{-11}
0.05	19.200	1.5×10^{-11}

(証明終)

観察 6.2

伸びるが、伸び方は冪則である（測った両対数の傾きは $\hbar^{-0.41}$ ）。 $\hbar$ を小さくすることは古典の軌道を延命するのであって、永続させはしない。

観察 6.3

「エーレンフェスト時間」もまた一語で二つを指している。文献でよく引かれる $\log(1/\hbar)$ という短さはカオス系のものであり、広がりが指数的事象であることから来る。本節の井戸は可積分であり、測ると冪則になる。上の指数は一つの波束・一つの井戸についての測定値であって、導出した指数ではない。

7. 点呼

観察 7.1

何が古典になるか	名前	いつ成り立つか	本稿の数
方程式	エーレンフェスト	二次までは厳密	$3\mu\sigma^2$
スペクトル	ボーアの対応原理	大きな量子数 ($\hbar$ は出ない)	$1 + 3/(2n)$
波動関数	WKB・準古典	井戸による	誤差 0 対 2.2×10^{-5}
状態	デコヒーレンス	重ね合わせは消える	論文55・138

観察 7.2

四つは強さの階段ではない。デコヒーレンスは状態を古典的にするが、方程式を古典化しない（論文55が書いたとおり、対角的な密度行列はどの結果が実現するかを語らない）。逆に、方程式が古典的でも重ね合わせは残りうる。決めているのは何に対して古典であれと言っているかである。

8. 結論

- エーレンフェストが厳密なのは二次まで（検算2.2）：隔たりは $3\mu\sigma^2 = 0.25725$ ちょうど。
- 隔たりは $\hbar$ に比例する（検算2.3）。
- 対応原理に $\hbar$ は現れない（観察3.4）：比は $1 + 3/(2n)$ 。
- 同じ WKB が調和振動子では全 n で厳密（検算4.2）、四次では漸近（検算4.3）。
- 二つの極限は交換しない（検算5.2・5.3）：差は $\hbar$ とともに消えるのに、待てば 0.000195 まで潰れて 0.664 へ戻る。
- 存続時間は伸びるが有限（検算6.1）： $8.16 \rightarrow 19.20$ 。

結び：「古典極限を取る」と言われたとき、次に問うべきは何が古典になれと言われているのかである。方程式か、スペクトルか、波動関数か、状態か——四つとも同じ言葉で呼ばれ、成り立つ条件も、成り立たない場所も違う。そして代数が戻ることは、振る舞いが戻ることを意味しない。

参考文献

- Bohr, N. (1913). *On the Constitution of Atoms and Molecules*. Philosophical Magazine, 26(151).
- Bohr, N. (1920). *Über die Serienspektren der Elemente*. Zeitschrift für Physik, 2(5).

3. Wentzel, G. (1926). *Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik*. Zeitschrift für Physik, 38(6).
4. Ehrenfest, P. (1927). *Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik*. Zeitschrift für Physik, 45(7).
5. Keller, J. B. (1958). *Corrected Bohr-Sommerfeld Quantum Conditions for Nonseparable Systems*. Annals of Physics, 4(2).
6. Hepp, K. (1974). *The Classical Limit for Quantum Mechanical Correlation Functions*. Communications in Mathematical Physics, 35(4).
7. Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D. (1978). *Deformation Theory and Quantization*. Annals of Physics, 111(1).
8. Averbukh, I. Sh., Perelman, N. F. (1989). *Fractional Revivals: Universality in the Long-Term Evolution of Quantum Wave Packets*. Physics Letters A, 139(9).
9. Zurek, W. H. (2003). *Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical*. Reviews of Modern Physics, 75(3).
10. 山岸勇輝 (2026). 規約は数でなければならない [論文15]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
11. 山岸勇輝 (2026). 訂正は運ばれねばならない [論文55]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603425
12. 山岸勇輝 (2026). 極限としてのモジュール [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
13. 山岸勇輝 (2026). 「不確定性原理」は一つの定理ではない [論文129]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079681
14. 山岸勇輝 (2026). どの部分がハミルトニアンなのか [論文138]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081512
15. 山岸勇輝 (2026). 極限には順序が要る [論文154]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084647
16. 山岸勇輝 (2026). 量子子の順序が中身のすべてである [論文177]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098103
17. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)