

掛け算は「二つ目」を決めない

— 同じ代数に別の余積が載り、表現のテンソル積が変わる：分離子は Δ である — [論文181]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文125 はホップ代数に一度だけ触れ、「ホップ・ファイブレーションとは無関係な別の対象である」と書いた。何をやるものかは書かなかった。本稿がそれを書く——掛け算は「一つの系にどう効くか」を言い、余積は「二つ目をどう作るか」を言う。そして掛け算は後者を決めない。新しい数学定理は主張しない。第一に、二つの群環が代数としては同じである。 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/4]$ と $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2]$ はどちらも四次元可換で、指標表の行列式はどちらも **16**——どちらも $\mathbb{C}^4$ である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。ところが表現のテンソル積が違う。テンソルの下での指標の位数は $\mathbb{Z}/4$ で **1, 4, 2, 4**、 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ で **1, 2, 2, 2** であった——掛け算が決めたものを、余積が決めている（第3節）。第三に、だからスピンは足し算で位相は掛け算になる。群型 $\Delta(g) = g \otimes g$ と原始型 $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ の違いである。原始型で J^2 の固有値は **0, 2, 2, 2**（第4節）。第四に、対蹠射が共役表現を与える（第5節）。第五に、柵は余可換性である。 $q = 1$ では組み紐は入れ替えそのもので二乗が **1** になるが、 $q \neq 1$ では $\hat{R}^2 - I$ が $q = 1.3$ で **0.690** に達する。それでも固有空間の次元はどの q でも **3** と **1** のままであり、動くのは固有値 q 、 $-1/q$ だけである（第6節）。第六に、体系自身の語の衝突を記録する。論文153 の「余積」は圏論の余極限であり、本稿の「余積」は構造写像 Δ である——同じ語で、種類すら違う（第7節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——ホップ代数、群環、包絡代数の余積、対蹠射、六頂点模型の R 行列とヤン＝バクスター方程式は、いずれも標準的である。量子群を構成しない（ q 変形した R 行列を使うだけである）。論文152 との関係：鏡像だが同じではない。152 は同じ指標表・別の群を並べ、分離子はフロベニウス＝シュア指標というより細かい不変量であった。本稿は同じ代数・別の余積を並べ、分離子是不変量ではなく追加の構造である——見落としていた差ではなく、初めから代数の外にある。加えたのは分離子を Δ と書いたこと、同じ代数の上で融合則が変わることを厳密に計算したこと、群型と原始型の違いが「掛かる」と「足す」の違いであることを示したこと、 $q \neq 1$ で固有値だけが動き次元が動かないことを測ったこと、体系内の「余積」二種を分けたことである。

1. 記法と位置づけ

代数 A に、余積 $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ 、余単位 $\epsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ 、対蹠射 $S: A \rightarrow A$ が備わり、所定の公理を満たすものをホップ代数という。本稿で計算に使うのは有限群の群環と、 $\mathfrak{sl}_2$ の包絡代数の一部だけである。数値はすべて自前の計算であり、厳密に 0 となるべきものは 0 と出た。

位置づけ：論文125 はホップという名を三人に分け、そのついでに「ハインツ・ホップは位相と代数の両方に名を残しているが、この二つは直接には関係しない別の対象である」と一度だけ書いた。本稿はその「代数」の側を開ける。

2. 代数としては、同じものである

観察 2.1

$\mathbb{Z}/4$ と $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ はどちらも位数 4 の可換群だが、同型ではない（前者には位数 4 の元があり、後者では単位元以外のすべての元が二乗して単位元になる）。

検算 2.2：それぞれの群環を四次元代数として組み、構造定数を調べる。

群環	可換性の破れ	指標表の行列式
$\mathbb{C}[\mathbb{Z}/4]$	0	16
$\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2]$	0	16

指標は両方とも厳密に乗法的であった（差の最大は 0 ）。（証明終）

観察 2.3

行列式が非零だから指標は基底をなし、**regular** 表現を対角化する。したがってどちらの群環も $\mathbb{C}^4$ である——代数としては同じ対象であり、掛け算の中に $\mathbb{Z}/4$ と $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ を区別するものは何も無い。

3. 芯：それでもテンソル積は違う

観察 3.1

一次元表現とは指標のことである。二つの表現をテンソルすると指標は各点で掛かる。ところがその操作は掛け算ではなく、余積 $\Delta(g) = g \otimes g$ を使っている—— g が両方の系に同時に効く、と決めているのが Δ である。

検算 3.2：融合則を書き下す。表の (i, j) 成分は $\chi_i \otimes \chi_j$ がどの指標になるかである。

$\mathbb{Z}/4$	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3
χ_0	0	1	2	3
χ_1	1	2	3	0
χ_2	2	3	0	1
χ_3	3	0	1	2

$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3
χ_0	0	1	2	3
χ_1	1	0	3	2
χ_2	2	3	0	1
χ_3	3	2	1	0

(証明終)

検算 3.3：テンソルの下での位数、すなわち $\chi^{\otimes k}$ が自明表現になる最小の k 。

群	四つの指標の位数
$\mathbb{Z}/4$	1, 4, 2, 4
$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	1, 2, 2, 2

(証明終)

観察 3.4

$\mathbb{Z}/4$ には位数 4 の指標がある——自分自身と二回テンソルしてもまだ自明にならない。 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ ではどの指標も二乗で自明になる。代数は同じで、テンソル積が違う。掛け算が決めなかったものを、余積が決めているのである。

観察 3.5

論文152 と並べておく。あちらは同じ指標表・別の群であり、分離子はフロベニウス＝シュア指標というより細かい不変量であった——見えていなかった差が、実は表の外にあった。こちらは同じ代数・別の余積であり、分離子是不変量ではなく追加の構造である——差は初めから代数の外にあり、より細かく見ても見つからない。

4. だからスピンは足し算で、位相は掛け算になる

観察 4.1

余積には二つの標準的な形がある。群型の $\Delta(g) = g \otimes g$ と、原始型の $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ である。前者では指標が掛かり、後者では生成元が足される。

検算 4.2：原始型でスピン $1/2$ を二つ合わせる。全角運動量の二乗の固有値を求める。

量	値	対応する $j(j+1)$
J^2 の固有値	0, 2, 2, 2	$j=0$ で 0、 $j=1$ で 2
$ [J_x, J_y] - iJ_z $ の最大	0	交換関係は保たれる

すなわち $j=1$ が三重、 $j=0$ が一重である。(証明終)

観察 4.3

交換関係が保たれたのは偶然ではない。 Δ は代数の準同型でなければならない、だからこそ「二つ合わせたもの」の上でも同じ対称性が働く。

検算 4.4：柵。 $\Delta(x) = x \otimes 1$ も代数の準同型であり、余結合性も満たす。ところが余単位の公理 $(\varepsilon \otimes \text{id})\Delta = \text{id}$ を破る——原始元では $\varepsilon(x) = 0$ だから、左辺は 0 になり、 x には決してならない。 x の成分の最大は 0.5 であり、破れは小さな補正ではなく全部である。(証明終)

観察 4.5

余積とは「二つを並べる任意のやり方」ではない。並べ方のうち、余単位と余結合性を満たすものだけが余積である。

5. 対蹠射：共役表現はどこから来るか

検算 5.1：群環では $S(g) = g^{-1}$ と置く。対蹠射の公理 $m(S \otimes \text{id})\Delta(g) = \varepsilon(g)1$ は、 $\mathbb{Z}/4$ でも $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ でもすべての元について成り立った。包絡代数では $S(x) = -x$ であり、 $-x + x = 0 = \varepsilon(x)1$ が恒等式として成り立つ。(証明終)

観察 5.2

対蹠射こそが、表現を双対表現へ送るものである。これが無ければ共役表現も無く、「逆向きの電荷」という概念も無い。掛け算・余積・対蹠射は、それぞれ一つの系・二つ目の系・逆向きの系を担っている。

6. 柵：余可換性と、動かない次元

観察 6.1

群環と包絡代数の余積は余可換である。二つの因子を入れ替えても Δ が変わらないので、 $V \otimes W$ と $W \otimes V$ はただの入れ替えで同一視でき、その二乗は 1 である (実測で I との差は 0)。

検算 6.2：余可換でない場合を、六頂点模型の R 行列で見る。 $\hat{R}$ がヤン＝バクスター方程式を満たすことを確かめたうえで、二乗を測る。

q	ヤン＝バクスターの残差	$ \hat{R}^2 - I $ の最大
1.0	0	0
1.1	2.8×10^{-17}	0.210
1.3	0	0.690
2.0	0	3.000
0.7	5.6×10^{-17}	0.729

(証明終)

観察 6.3

$q = 1$ では組み紐は入れ替えそのものであり、二乗して 1 に戻る。 $q \neq 1$ では戻らない——二つの系を交換することが対合でなくなる。「交換」もまた一語で二つの操作を指している——置換と組み紐である。

検算 6.4：それでも動かないものがある。 $\hat{R}$ は $(\hat{R} - q)(\hat{R} + q^{-1}) = 0$ を満たし、固有空間の次元は q に依らない。

q	ヘッケ関係の残差	固有値 q の重複度	固有値 $-1/q$ の重複度
1.0	0	3	1
1.3	5.5×10^{-17}	3	1
2.0	0	3	1
0.7	4.1×10^{-17}	3	1
5.0	8.9×10^{-16}	3	1

(証明終)

観察 6.5

対称部分の三次元と反対称部分の一次元は、 q をどう動かしても **3** と **1** のままである。動くのは固有値 q と $-1/q$ だけであり、 $q = 1$ でそれが $+1$ と -1 になる。分解は連続に変形されるのに、次元は整数のまま動かない——論文173 が「**柵は整数性である**」と書いた場所と同じ形である。

7. 点呼：体系の中に「余積」が二つある

観察 7.1

論文153 は圏論の余積を計算した——**Ab** における $\mathbb{Z}/3$ の余積は **9** 元、**Grp** における $\mathbb{Z}/2$ の余積は無限二面体群である。本稿の余積は構造写像 Δ である。

圏論の余積		ホップ代数の余積
何であるか	対象（余極限）	写像
何が決めるか	圏	追加の構造
いくつありうるか	同型を除いて一つ	一つの代数に何通りも

観察 7.2

同じ語であり、種類すら違う。一方は圏が決めてしまうもの、他方は代数の外から載せるものである。

8. 結論

1. 二つの群環は代数として同じ（検算2.2）：どちらも $\mathbb{C}^4$ 、行列式はどちらも **16**。
2. それでもテンソル積が違う（検算3.3）：指標の位数が **1, 4, 2, 4** 対 **1, 2, 2, 2**。
3. 原始型の余積がスピンを足す（検算4.2）： J^2 の固有値は **0, 2, 2, 2**。
4. 余積は並べ方の何でもよいものではない（検算4.4）： $x \otimes 1$ は余単位の公理を全部破る。
5. 対蹠射が共役表現を与える（検算5.1）。
6. $q \neq 1$ で交換は対合でなくなる（検算6.2）： $q = 1.3$ で **0.690**。

7. それでも次元は **3** と **1** のまま (検算6.4)。

結び：対称性の群を知っても、二つの系をどう合わせるかは決まらない。掛け算は一つの系にどう効くかを言い、余積は二つ目をどう作るかを言い、対蹠射は逆向きをどう作るかを言う——三つは別の情報である。同じ掛け算の上に別の余積が載れば、同じ対称性が別の物理を与える。

参考文献

1. Hopf, H. (1941). *Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen*. Annals of Mathematics, 42(1).
 2. Yang, C. N. (1967). *Some Exact Results for the Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction*. Physical Review Letters, 19(23).
 3. Milnor, J. W., Moore, J. C. (1965). *On the Structure of Hopf Algebras*. Annals of Mathematics, 81(2).
 4. Sweedler, M. E. (1969). *Hopf Algebras*. New York: W. A. Benjamin.
 5. Baxter, R. J. (1972). *Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model*. Annals of Physics, 70(1).
 6. Jimbo, M. (1985). *A q -Difference Analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter Equation*. Letters in Mathematical Physics, 10(1).
 7. Drinfeld, V. G. (1987). *Quantum Groups*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley 1986. Providence: American Mathematical Society.
 8. 山岸勇輝 (2026). 三人のホップ [論文125]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079384
 9. 山岸勇輝 (2026). 比と尺度 [論文140]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081997
 10. 山岸勇輝 (2026). 同じ表で、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
 11. 山岸勇輝 (2026). 関手が忘れるもの [論文153]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084355
 12. 山岸勇輝 (2026). 柵は整数性である [論文173]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094507
 13. 山岸勇輝 (2026). 「古典極限」は一つの極限ではない [論文180]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22099046
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)