

両立しなくなるのは、三つ目の選択肢からである

— 望ましい条件は二択ならすべて成り立つ：分離子は「何を諦めるか」 — [論文184]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

本体系はすでにいくつかの不可能性を運んでいる（論文25・163・178・179）。だがそれらはすべて「この対象は作れない」という形であった。本稿は別の形を加える——もっともらしい条件が同時には成り立たない、という不可能性である。新しい数学定理は主張しない。第一に、選択肢が二つなら緊張は無い。多数決は匿名性・中立性・単調性を、投票者が2人から5人まですべての場合で満たした（第2節）。第二に、三つになると多数決が既に壊れる。循環する意見の並びは3人で全体の1/18を占める。ところが4人では一つも無く、6人で戻る——数え上げで説明がつく（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。独立性の仮定を使うと規則の空間が有限に落ちるので、最小の場合を機械で全数掃くことができる。4096通りを調べて、推移性と全員一致を同時に満たすものはちょうど二つ、どちらも独裁者であった（第4節）。第四に、逃げ道は四つあり、どれも何かを差し出す。独立性を捨てればボルダ得点が使えが、4人の例で誰のa対bの順位も変えずに社会の判定が反転した（第5節）。第五に、柵は選択肢の個数である。二つならすべて成り立ち、三つなら独裁者しか残らない（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——コンドルセ、アロー、メイ、ブラックの結果はいずれも標準的である。また、いかなる政治的・制度的な主張もしない——扱うのは、条件の集合が両立するかどうかという数学だけである。論文25との関係：25は「解けない」を三つに分け、分離子を許した道具に置いた。本稿の分離子は諦める条件である——道具を増やす話ではなく、要求を減らす話である。加えたのは最小の場合でアローの定理を全数探索で確かめたこと（引用ではなく機械が掃いた）、循環が4人では起こりえないことを数え上げで示したこと、ボルダの独立性違反を探索で見つけ、厳密な反転が3人には無く4人に在ることを確かめたこと、四つの逃げ道を「何を差し出すか」で並べたことである。

1. 記法と位置づけ

選択肢を a 、 b 、 c とし、各投票者はそれらに順位をつける。全員の順位の組を意見の並びと呼ぶ。社会の順位を返す規則に、次を要求する——全員一致（全員が x を y より上に置けば社会もそうする）、独立性（ x と y の社会的順位は、各人の x と y の順位だけで決まる）、推移性（社会の順位が循環しない）、非独裁（一人の順位がそのまま社会の順位になる、ということがない）。計算はすべて全数探索である。

位置づけ：論文179 は「構成できない」を三つに分けた。そこでの不可能性は対象についてであった——書き下せない、探せない、算法が無い。本稿の不可能性は要求の組についてである——対象はいくらでも作れるが、条件を全部は満たせない。

2. 選択肢が二つなら、緊張は無い

検算 2.1：選択肢を二つにして多数決を取り、すべての意見の並びについて条件を確かめる。

投票者数	並びの数	匿名性	中立性	単調性
2	4	成立	成立	成立
3	8	成立	成立	成立
4	16	成立	成立	成立
5	32	成立	成立	成立

（証明終）

観察 2.2

どの人数でも三条件が同時に成り立つ。選択肢が二つのあいだは、何も諦めなくてよい——多数決がそのまま働く。

3. 三つになると、多数決が既に壊れる

検算 3.1：三つの選択肢について、対ごとの多数決が循環する意見の並びを数える。

投票者数	並びの総数	循環する数	割合
3	216	12	1/18
4	1296	0	0
5	7776	540	5/72
6	46656	180	5/1296
7	279936	21000	875/11664

(証明終)

観察 3.2

4 人では一つも無い。これは「小さいから稀」ではなく、起こりえないのである。理由は数え上げで書ける——各投票者が三つの差 (a 対 b 、 b 対 c 、 c 対 a) に与える寄与は、六通りの順位のどれでも和が $+1$ か -1 にしかならない。したがって n 人での三つの差の和は絶対値が n を超えない。ところが循環には三つの差が同符号であることが要り、 n が偶数なら各差は偶数だから大きさが 2 以上、和は 6 以上でなければならない。 $n = 4$ ではこれが満たせない。

検算 3.3：各順位の寄与。

順位	三つの寄与	和
abc	$(+1, +1, -1)$	$+1$
acb	$(+1, -1, -1)$	-1
bac	$(-1, +1, -1)$	-1
bca	$(-1, +1, +1)$	$+1$
cab	$(+1, -1, +1)$	$+1$
cba	$(-1, -1, +1)$	-1

和はどれも ± 1 である。(証明終)

観察 3.4

6 人では戻る (180 通り)。和が 6 以上になりうるのは、全員が同じ符号の +1 を出し、三つの差がすべてちょうど 2 のときだけである——ぎりぎりを通る。

4. 芯：最小の場合を、機械で全数掃く

観察 4.1

独立性は空間を有限に落とす。 x と y の社会的順位が各人の x 対 y の順位だけで決まるなら、規則とは三つの対それぞれについての関数にすぎない。投票者が 2 人なら各関数は $2^{2^2} = 16$ 通りであり、規則の全体は $16^3 = 4096$ 通りである。

検算 4.2：その 4096 通りを掃き、推移性（どの並びでも社会の順位が循環しない）と全員一致を同時に満たすものを数える。

	数
掃いた規則	4096
推移性かつ全員一致を満たす	2
そのうち独裁者	2
独裁者でない生き残り	0

(証明終)

観察 4.3

生き残りはすべて独裁者であった。これはアローの定理を引用したのではなく、最小の場合について機械が確かめたものである。「四つの条件は両立しない」は、ここでは 4096 を数えた結果である。

観察 4.4

全数探索は定理の証明ではない——確かめたのは 2 人・3 選択肢の場合だけである。一般の場合はアロー（1951）による。

5. 逃げ道は四つあり、どれも何かを差し出す

検算 5.1：独立性を捨てる——ボルダ得点。3 人と 4 人で、全員の a 対 b の順位が同じまま社会の判定がどこまで動くかを全数探索する。

投票者数	判定が変わるか	厳密に反転するか
2	する	する
3	する	しない
4	する	する

（証明終）

検算 5.2：4 人での反転の実例。

意見の並び	得点	判定
$abc \mid abc \mid bac \mid bca$	$a = 5, b = 6, c = 1$	b が勝つ
$abc \mid acb \mid bac \mid bac$	$a = 6, b = 5, c = 1$	a が勝つ

どの投票者も a と b の順位を変えていない——動いたのは c の位置だけである。（証明終）

観察 5.3

a と b について誰も何も変えていないのに、社会の判定が入れ替わった。これが独立性の禁じていることであり、ボルダ得点の代償である。そして 3 人では厳密な反転が起こらない——勝ちが引き分けになるまでである。循環と同じく、ここにも人数の偶奇が効いている。

観察 5.4

推移性を捨てる——多数決をそのまま使い、循環と付き合う（第3節）。

検算 5.5：定義域を捨てる——選択枝を直線 $a < b < c$ に並べ、山が一つだけの順位（単峰性）に限る。許される順位は abc 、 bac 、 bca 、 cba の四つである。

投票者数	単峰な並びの数	循環する数
3	64	0
5	1024	0

（証明終）

観察 5.6

循環が消える。ただし代償は誰がどう考えてよいかを先に制限することである—— acb と cab という二つの意見は、初めから受け付けない。

検算 5.7：全員一致を捨てる——社会の順位を常に $a > b > c$ とする定数の規則。これは独立で（誰の意見も見ない）、推移的で、独裁者もいない。全員一致に反する並びは 27 通り見つかった。（証明終）

観察 5.8

四つ目の逃げ道は確かに存在する——そして誰も選ばない。条件の一覧が長いのは、この種の逃げ道を塞ぐためである。

6. 点呼

観察 6.1

捨てるもの	得られるもの	代償
独立性	ボルダ得点	無関係な三つ目の位置で判定が反転する
推移性	多数決	社会の順位が循環する
定義域	単峰性・中位投票者	ある意見を初めから認めない
全員一致	定数の規則	誰の意見も効かない

観察 6.2

柵は選択肢の個数である。

選択肢	何が起きるか
2 つ	すべての条件が成り立つ（検算2.1）
3 つ	独裁者しか残らない（検算4.2）

観察 6.3

体系の柵の並びに加わる——論文171 の線形性、論文173 の整数性、論文177 のコンパクト性、そしてここでは選択肢が二つであること。いずれも「あと一つ増やすと壊れる」場所に立っている。

観察 6.4

論文25 との違いを書いておく。25 の分離子は許した道具であり、道具を増やせば解けるようになった。本稿の分離子は諦める条件であり、増やす側には何も無い——減らすしかない。

7. 結論

1. 二択なら緊張が無い（検算2.1）：三条件が全人数で成立。
2. 三択で循環が現れる（検算3.1）：3 人で $1/18$ 。
3. 4 人では循環が起こりえない（観察3.2）：寄与の和が ± 1 だから。

4. 4096 通りの生き残りは 2、どちらも独裁者（検算4.2）。
5. ボルダは独立性を破る（検算5.2）： c を動かしただけで a 対 b が反転。
6. 単峰性は循環を消す（検算5.5）：0 件。
7. 柵は選択肢の個数（観察6.2）。

結び：「どの決め方が正しいか」という問いには、条件をすべて満たす答が無い。答があるのは「何を諦めるか」という問いのほうである。そして諦めるものを選ぶのは数学ではない——数学が言えるのは、何かは必ず諦めねばならない、というところまでである。

参考文献

1. Condorcet, M. J. A. N. de C. (1785). *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Paris: Imprimerie Royale.
2. Black, D. (1948). *On the Rationale of Group Decision-making*. Journal of Political Economy, 56(1).
3. Arrow, K. J. (1951). *Social Choice and Individual Values*. New York: Wiley.
4. May, K. O. (1952). *A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision*. Econometrica, 20(4).
5. Gibbard, A. (1973). *Manipulation of Voting Schemes: A General Result*. Econometrica, 41(4).
6. Satterthwaite, M. A. (1975). *Strategy-proofness and Arrow's Conditions*. Journal of Economic Theory, 10(2).
7. 山岸勇輝 (2026). 「解けない」は三つの別根を持つ [論文25]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090297
8. 山岸勇輝 (2026). 同じ表で、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
9. 山岸勇輝 (2026). 不動点是一个の定理ではない [論文161]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092530
10. 山岸勇輝 (2026). 存在と構成は別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
11. 山岸勇輝 (2026). 柵は線形性である [論文171]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094287
12. 山岸勇輝 (2026). 柵は整数性である [論文173]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094507
13. 山岸勇輝 (2026). 量子子の順序が中身のすべてである [論文177]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098103
14. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419
15. 山岸勇輝 (2026). 「次元の呪い」は一つの呪いではない [論文182]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22104170

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)