

欠陥を分類しているのは、方程式ではなく行き先の空間である

— ホモトピー群が数え、「安定」は二つある — [論文185]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

本体系は位相を繰り返し扱ってきた（論文67・68・114・125・128・146・151）。だが「何が欠陥を分類するのか」は一度も問われていない。答は場の値が住む空間のホモトピー群であって、場が置かれた空間でも、方程式でもない。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、巻き数は整数である。角度に $\sin 3\theta$ という揺れを足しても巻き数は 1.0 のまま動かなかった（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。同じ平面・同じ次元でも、行き先を変えると許される欠陥が変わる。矢印の場合では半回転の欠陥が禁じられ、向きだけの場（線）では許される——方程式も平面も何一つ変えていない（第3節）。第三に、半分が二つで元に戻る。半欠陥は球面上で対蹠点へ渡る道であり、二つ繋ぐと出発点へ戻った——分類の群は位数 2 である（第4節）。第四に、群が非可換なら、欠陥の電荷は他の欠陥の周りを一周させると変わる。論文152 が組んだ Q_8 を欠陥群に使うと、 j の周りを回った i は $-i$ になって戻った（第5節）。第五に、これがブレーキである。「安定」は一語で二つを指す。 $d=1$ では尺度 $\lambda=1$ に真の最小があるが、 $d=2$ 以上では最小が無く、縮めるほど得になる——位相的に自明でなくても、点へ潰されうる（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない——ホモトピー群による欠陥の分類（トゥールーズ＝クレマン、マーミン）とデリックの尺度議論は、いずれも標準的である。特定の物質や実験について何も主張しない。論文128 との関係：128 は台となる多様体上のベクトル場を扱い、指数の総和とオイラー標数を結んだ。本稿が見るのは行き先の空間であり、別の空間である——同じ「位相」でも、どちらの空間の話かで別物になる。論文146・151 との関係：あちらは一つの欠陥（ディラック単極子）を被覆とチェックのコチェインで計算した。本稿はその一つがどの一般則の実例かを書く。加えたのは同じ平面で行き先だけを変えて許される欠陥が変わることを数で示したこと、半欠陥の合成を球面上の道で確かめたこと、非可換な場合に電荷が共役で動くことを Q_8 で実演したこと、「安定」の二義をデリックの尺度で分けたことである。

1. 記法と位置づけ

場は台となる空間の各点に、行き先の空間（秩序変数空間）の値を割り当てる。欠陥を囲む小さな球面を行き先の空間へ写した写像のホモトピー類が、欠陥の類である。数値はすべて自前の計算である。

位置づけ：論文128 はポアンカレ=ホップを扱い、台の上のベクトル場の零点の指数を数えた。本稿が数えるのは行き先の穴である。同じ「位相的」という語が、二つの違う空間について使われている。

2. 巻き数は整数である

検算 2.1：円周上の単位ベクトル場について、一周での回転量を測る。

場の角度	測った巻き数	整数か
θ	1.0	はい
$-\theta$	-1.0	はい
2θ	2.0	はい
$\theta + \sin 3\theta$	1.0	はい
定数	0.0	はい

（証明終）

観察 2.2

$\sin 3\theta$ の揺れを足しても巻き数は動かない。それが位相不変量ということである。整数になる理由は一つ——一周したら場は自分自身に戻らねばならない。

3. 芯：同じ平面でも、行き先を変えると欠陥が変わる

観察 3.1

向きだけを持ち矢印を持たない場（線の間）では、 n と $-n$ が同じ状態である。したがって行き先は円ではなく、対蹠点を同一視した円であり、場は一周して自分自身または反対向きに戻ればよい。

検算 3.2

配位	回転量	矢印の場合	線の場合
$k = 1$	1.0	許される	許される
$k = 2$	2.0	許される	許される
$k = 1/2$	0.5	禁じられる	許される
$k = -1/2$	-0.5	禁じられる	許される
$k = 3/2$	1.5	禁じられる	許される

半回転では角度が π だけ動き、 π を法として **0** に戻る（実測 **0.0**）。（証明終）

観察 3.3

半回転の欠陥は、矢印には禁じられ、線には許される。平面は同じ、次元も同じ、方程式は一つも書いていない。変えたのは場の値が住む空間だけである。分類しているのは、そこなのである。

4. 半分が二つで、元に戻る

観察 4.1

三次元の線の場合では、行き先は球面の対蹠点を同一視した空間である。半欠陥とは、球面上で対蹠点へ渡る道のことであり、整数欠陥とは元の点へ戻る道である。

検算 4.2：北極を x 軸のまわりに半回転ずつ回して、行き先を見る。

半欠陥の個数	終点	類
1	対蹠点	非自明
2	出発点	自明
3	対蹠点	非自明

(証明終)

観察 4.3

半分が二つで出発点に戻る——つまり類の群は位数 2 であり、整数の欠陥は連続変形で消せる。「巻き数 1 の欠陥がある」は、行き先によっては何も無いのと同じなのである。

5. 非可換なら、電荷は一周させると変わる

観察 5.1

分類の群が非可換のとき、欠陥の電荷は共役を除いてしか定まらない。論文152 が組んだ Q_8 を欠陥群として使う。

検算 5.2

計算	結果
ij	k
ji	$-k$
jij^{-1}	$-i$

(証明終)

観察 5.3

j の周りを一周した i は $-i$ になって戻った。欠陥そのものには何もしていない——ただ別の欠陥の周りを運んだだけである。したがって「この欠陥の電荷は i である」は、道を指定しなければ意味を持たない。

検算 5.4：共役類は $\{1\}$ 、 $\{-1\}$ 、 $\{\pm i\}$ 、 $\{\pm j\}$ 、 $\{\pm k\}$ の五つである。(証明終)

観察 5.5

二元からなる類が、符号が不変量にならない欠陥である。論文152 は Q_8 と D_4 が指標表を共有しながら同型でないことを示した。ここでは同じ Q_8 が、まったく別の役目で現れている——群は一つ、使われ方が二つである。

6. ブレーキ：「安定」は一語で二つを指す

観察 6.1

位相的に安定とは、連続変形では消せないという意味である。エネルギーの最小にいる、という意味ではない。

検算 6.2：静的な場のエネルギーを $E = E_{\text{勾配}} + E_{\text{ポテンシャル}}$ と書き、 $f(x)$ を $f(\lambda x)$ に置き換える。 λ が大きいほど縮んでいる。すると $E(\lambda) = \lambda^{2-d} E_{\text{勾配}} + \lambda^{-d} E_{\text{ポテンシャル}}$ となる。両方を 1 として測る。

d	$\lambda = 1$	$\lambda = 1000$	最小はどこか
1	2.0	1000.0	$\lambda = 1$ に真の最小
2	2.0	1.0	無い（縮め続けるほど得）
3	2.0	0.001	無い（点へ潰れる）
4	2.0	10^{-6}	無い

広い尺度の格子で最小を探すと、 $d = 1$ では $\lambda = 1$ ($E = 2.0$) に内部の最小があり、 $d = 2$ と $d = 3$ では格子の端へ押し出された。（証明終）

観察 6.3

二次元以上では、エネルギーが好む大きさが無い。縮めれば必ず得になる。したがって配位が位相的に非自明であっても、点へ駆り立てられうる。位相が禁じるのは消すことであって、縮めることではない。

観察 6.4

だから実在の欠陥にはもう一つ何かが要る——ゲージ場、高階の微分項、あるいは保存量である。そしてその何かは、ホモトピー群からは出てこない。

7. 点呼

観察 7.1

群	欠陥	余次元	行き先に要るもの
π_0	壁	1	連結でないこと
π_1	線（渦・転傾）	2	穴
π_2	点（単極子）	3	二次元の穴
π_3	テクスチャ	4	三次元の穴

観察 7.2

群が教えるのはどの類が在るかだけである。欠陥が存在するとも、安定だとも、いくらかかるとも言わない。論文163は「存在」と「構成」が別の文だと書いた——ここで加わるのは分類という第三の文である。三つは順に弱い——分類は類の一覧を与え、存在は空でないことを言い、構成は一つ渡す。

観察 7.3

そして本稿の柵は行き先の空間である。論文171の線形性、173の整数性、177のコンパクト性、184の選択枝の個数に続く。いずれも「そこを動かすと答が変わる」場所である。

8. 結論

- 1. 巻き数は揺れて動かない（検算2.1）： $\sin 3\theta$ を足しても 1.0。

2. 行き先を変えると許される欠陥が変わる (検算3.2) : 半回転は矢印に禁じられ線に許される。
3. 半分が二つで自明 (検算4.2) : 群は位数 **2**。
4. 非可換なら電荷は一周で変わる (検算5.2) : $\mathbf{j}\mathbf{j}^{-1} = -\mathbf{i}$ 。
5. 「安定」は二語 (検算6.2) : $d \geq 2$ ではエネルギーの最小が無い。
6. 分類は存在でも構成でもない (観察7.2)。

結び : 「この欠陥は位相的に守られている」と言われたら、次に問うべきはどの空間の位相かである。場が置かれた空間ではなく、場の値が住む空間である。そして守られているのは消えないことだけであって、潰れないことではない。

参考文献

1. Derrick, G. H. (1964). *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*. Journal of Mathematical Physics, 5(9).
2. Toulouse, G., Kléman, M. (1976). *Principles of a Classification of Defects in Ordered Media*. Journal de Physique Lettres, 37(6).
3. Volovik, G. E., Mineev, V. P. (1977). *Investigation of Singularities in Superfluid He-3 and Liquid Crystals by Homotopic Topology Methods*. Soviet Physics JETP, 45(6).
4. Mermin, N. D. (1979). *The Topological Theory of Defects in Ordered Media*. Reviews of Modern Physics, 51(3).
5. Kibble, T. W. B. (1976). *Topology of Cosmic Domains and Strings*. Journal of Physics A, 9(8).
6. 山岸勇輝 (2026). ホップの扉 [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
7. 山岸勇輝 (2026). 自分が4次元にいることを知っているか [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
8. 山岸勇輝 (2026). 三人のホップ [論文125]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079384
9. 山岸勇輝 (2026). ポアンカレ=ホップは片側しか与えない [論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576
10. 山岸勇輝 (2026). 渦線は恒等式であって法則ではない [論文130]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079996
11. 山岸勇輝 (2026). ディラックの弦は紙の上の跡である [論文146]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082868
12. 山岸勇輝 (2026). 二枚では足りない [論文151]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084096
13. 山岸勇輝 (2026). 同じ表で、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
14. 山岸勇輝 (2026). 存在と構成は別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
15. 山岸勇輝 (2026). 柵は整数性である [論文173]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094507
16. 山岸勇輝 (2026). 「次元の呪い」は一つの呪いではない [論文182]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22104170

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)