

「証明できない」は、文の性質ではない

— 同じ文が、公理を足すだけで独立にも定理にも反例にもなる — [論文189]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

本体系には「できない」の論文が二つある——論文25は「解けない」を許した道具で三つに分け、論文179は「構成できない」をどこまで探せるかで三つに分けた。どちらも対象についてであった。本稿は文について同じことをする。新しい数学定理は主張しない。第一に、決定不能な文は謎めいた文ではない。反射的かつ推移的という理論のもとで「対称的である」という文を取ると、三要素の模型が29個あり、そのうち5個で真、24個で偽である——両方を並べて見せることで独立性が言える（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。同じ文が、公理を足すだけで三通りになる。「対称的」を加えれば模型は5個・全部で真となり定理、「どこかの組が一方通行」を加えれば模型は24個・全部で偽となり反証、何も加えなければ独立である（第3節）。第三に、柵は無矛盾性である。反射的かつ非反射的という理論の模型は0個であり、そこでは何もかもが「証明できる」——不完全性は、無矛盾な理論が払うものである（第4節）。第四に、そこから従わないことを四つ挙げる。決定不能は「誰にも分からない」ではなく、「真偽が無い」でもなく、「その理論が間違っている」でもない（第5節）。第五に、本稿はゲーデルの定理を証明しない。示したのは独立性が対に属することだけであり、算術を含む理論についての言明は引用である（第5節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——完全性定理、不完全性定理、平行線公準や連続体仮説の独立性は、いずれも標準的である。そして本稿は不完全性定理を証明しない——有限の模型を全数列举して示せるのは、独立性が理論と文の対に属するということまでである。論文25・179との関係：25の分離子は許した道具、179の分離子はどこまで探せるかであり、どちらも対象について。本稿の分離子はどの公理の下でであり、文についてである——三つで一つの並びをなす。加えたのは三つ目の「できない」を体系に置いたこと、独立性を逆理ではなく模型の全数列举で見せたこと、同じ文が独立・定理・反証の三通りになるのを一つの表に並べたこと、柵を無矛盾性に置いたことである。

1. 記法と位置づけ

有限集合の上の二項関係 R を考え、理論とはその R に課す条件の集まりとする。モデルとは条件を満たす R のことである。文 S が理論 T から独立であるとは、 T のモデルで S が真になるものと偽になるものがどちらもあることをいう。列挙はすべて全数である。

位置づけ：論文163 は「存在」と「構成」を分け、論文188 はそこに「選択」を加えた。本稿が扱うのはさらに手前——そもそも言えるかどうかである。

2. 決定不能な文は、謎めいた文ではない

観察 2.1

理論 T を「 R は反射的かつ推移的」とし、文 S を「 R は対称的」とする。 k 要素の上で T のモデルをすべて数え、 S の真偽を数える。

検算 2.2

k	T のモデル	S が真	S が偽	判定
1	1	1	0	T が S を決める
2	4	2	2	S は独立
3	29	5	24	S は独立

(証明終)

観察 2.3

二要素から先では、 S が成り立つモデルと成り立たないモデルが両方ある。だから T は S を証明も反証もできない——そしてそれは両方を並べて見せることで言えており、自己言及も逆理も使っていない。

観察 2.4

$k = 1$ では独立でない——一要素の上では反射性と推移性が対称性を強制してしまう。独立かどうかは、理論と文だけでなくどこまで大きなモデルを許すかにも依る。

3. 芯：同じ文が、公理を足すだけで三通りになる

検算 3.1：三要素の上で、基礎の理論に公理を一つずつ足す。

理論	模型	S が真	S が偽	S の身分
反射的かつ推移的	29	5	24	独立
さらに対称的	5	5	0	定理
さらに全域的	13	1	12	独立
さらにどこかの組が一方通行	24	0	24	反証

(証明終)

観察 3.2

文は一字も変わっていない。変わったのは、立っている公理だけである。それだけで同じ文が独立にも定理にも反例にもなる。

観察 3.3

したがって「この文は証明できない」は、それだけでは意味を持たない。独立性は文の性質ではなく、（文、公理）という対の性質である。論文185 が「位相的に守られている」に対してどの空間の位相かと問い返したのと同じ形である。

観察 3.4

公理を足せば模型は減る。29 から 5、13、24 へ。決まるようになるのは、許す世界を狭めたからであって、何かを発見したからではない。

4. 柵は、無矛盾性である

検算 4.1：「反射的かつ非反射的」という理論の模型を数える。

理論	模型の個数
反射的かつ非反射的	0

(証明終)

観察 4.2

模型が一つも無ければ、どの文も全部の模型で成り立つ——その否定でもある。矛盾した理論は完全であり、そして何の役にも立たない。

観察 4.3

したがって不完全性は、理論の欠陥ではなく無矛盾性の代価である。論文184 が「望ましい条件は同時には成り立たない」を書いたのと同じ形であり、ここでも問いは何を諦めるかである——完全性を諦めるか、無矛盾性を諦めるか。

5. そこから従わないこと

観察 5.1

言われがちなこと	実際は
決定不能なら誰にも分からない	偽：より大きな理論では決まる
決定不能なら真偽が無い	偽：ある模型で真、別の模型で偽
決定不能ならその理論が間違い	偽：無矛盾だからこそ払う代価
公理を足せば一度で片づく	偽：新しい理論にも新しい隙間

観察 5.2

最後の行が、不完全性定理の実際の中身である——算術を含み、無矛盾で、公理を機械的に列挙できる理論には、必ず新しい隙間が残る。

観察 5.3

本稿はそれを証明していない。有限の模型を全数列挙して示せるのは、独立性が対に属するという一点だけである。最後の行はゲーデル（1931）の引用であり、本稿の計算からは出てこない。

6. 点呼：三つの「できない」

観察 6.1

語	何について	分離子	動かすと
解けない（論文25）	対象	許した道具	道具を増やせば解ける
構成できない（論文179）	対象	どこまで探せるか	探索の届く範囲
証明できない（本稿）	文	どの公理の下でか	公理を足せば決まる

観察 6.2

三つは強さの階段ではない。25 は許可の話、179 は探索の話、本稿は文脈の話である。同じ「できない」という日本語が、動かすべきものの違う三つを指している。

観察 6.3

そして三つとも、次に問うべき言葉が違ふ——「どの道具まで許したのか」「どこまで探したのか」「どの公理の下でか」。

7. 結論

1. 独立性は両方の模型を並べて見せられる（検算2.2）：三要素で **5** 対 **24**。
2. $k = 1$ では独立でない（観察2.4）：大きさにも依る。
3. 同じ文が独立・定理・反証になる（検算3.1）：**5/24**、**5/0**、**0/24**。
4. 決まるのは許す世界を狭めたから（観察3.4）：模型が **29** から減る。
5. 柵は無矛盾性（検算4.1）：矛盾した理論の模型は **0** 個。
6. 本稿は不完全性定理を証明していない（観察5.3）。

結び：「この命題は証明できない」と言われたら、次に問うべきはどの公理の下でかである。文だけを取り出しても身分は決まらない——独立であるとは、その文についての事実ではなく、その文と、立っている公理との関係についての事実である。

参考文献

1. Gödel, K. (1930). *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 37.
2. Gödel, K. (1931). *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 38.
3. Gödel, K. (1940). *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Princeton: Princeton University Press.
4. Cohen, P. J. (1963). *The Independence of the Continuum Hypothesis*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 50(6).
5. Beltrami, E. (1868). *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*. Giornale di Matematiche, 6.
6. 山岸勇輝 (2026). 「解けない」は三つの別根を持つ [論文25]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090297

7. 山岸勇輝 (2026). 同じ表で、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
8. 山岸勇輝 (2026). 存在と構成は別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
9. 山岸勇輝 (2026). 恒等式であった一致 [論文169]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093563
10. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419
11. 山岸勇輝 (2026). 両立しなくなるのは、三つ目の選択肢からである [論文184]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105459
12. 山岸勇輝 (2026). 欠陥を分類しているのは行き先の空間である [論文185]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105496
13. 山岸勇輝 (2026). 未知数より少ない測定で、厳密に決まる [論文188]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105691

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)