

„Selten“ wird auf einer logarithmischen Skala gemessen

— Der zentrale Grenzwertsatz ist im Schwanz das falsche Instrument, und der Zaun ist der einzelne große Sprung — [Aufsatz 190]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan

August 2026

— *From thinking to syncing.* —

Zusammenfassung

Wenn eine Wahrscheinlichkeit durch Größenordnungen fällt, hört es auf, etwas zu bedeuten, wie viele Male größer das eine als das andere ist. Dieser Aufsatz zeigt an exakten kombinatorischen Werten, dass die richtige Skala für ein seltenes Ereignis der Logarithmus geteilt durch n ist. ES WIRD KEIN NEUER MATHEMATISCHER SATZ BEANSPRUCHT.

Erstens: Der zentrale Grenzwertsatz ist im Schwanz das falsche Instrument. Dafür, dass eine faire Münze einen Mittelwert von 0.75 erreicht, läuft das Verhältnis der exakten Wahrscheinlichkeit zur Gauß-Näherung 1.63, 1.42, 1.11, 0.690, 0.271 — es kreuzt 1 und fällt weiter (Abschnitt 2).

Zweitens, und das ist der Kern. Die Wahrscheinlichkeit selbst stürzt auf 5.1×10^{-20} ab, während $-\log(\text{Wahrscheinlichkeit})/n$ ruhig auf eine einzige Zahl zuläuft: 0.1939, 0.1508, 0.1346 — wobei sich der Abstand ungefähr halbiert, jedes Mal wenn sich n verdoppelt (Abschnitt 3).

Drittens: Die Zahl, auf die sie zuläuft, ist eine relative Entropie. Ändert man das Ziel auf $3/5$, $2/3$, $3/4$ und $9/10$, so stimmt der Wert bei $n = 800$ bis auf 0.004 mit der relativen Entropie überein (Abschnitt 4).

Viertens: Der Zaun ist der einzelne große Sprung. Bedingt man auf eine seltene große Summe, so bewegt sich der Anteil des größten Terms für das Exponentialgesetz nicht, von 0.0519 zu 0.0513, während er für ein Pareto-Gesetz von 0.1404 auf 0.9180 springt (Abschnitt 5).

Fünftens wird ein Zusammenstoß von Wörtern festgehalten. Die Wendung, die in Aufsatz 42 dieser Reihe erscheint, bedeutet die größte Abweichung in einer numerischen Prüfung und hat nichts mit der hier genannten Theorie zu tun (Abschnitt 6).

Tragweite (scope note): ES WIRD KEIN NEUER MATHEMATISCHER SATZ BEANSPRUCHT — der Satz von Cramér, Ratenfunktionen, der Satz von Sanov und das Prinzip des einzelnen großen Sprungs für schwere Schwänze sind alle Standard. Und hier wird kein Satz bewiesen — gezeigt wird eine Reihe von Zahlen bei endlichem n , und die Existenz des Grenzwerts wird zitiert. Zu Aufsatz 187: jener Aufsatz teilte warum der Grenzwert gaußsch ist in vier Gründe auf. Die Frage hier ist was dort regiert, wo das Gaußsche nicht gilt, eine andere. Zu Aufsatz 137: jener Aufsatz untersuchte die relative Entropie als etwas, das kein Abstand ist. Hier erscheint dieselbe Formel als Exponent — ein Werkzeug, zwei Aufgaben. Hinzugefügt wird, an exakten Werten zu zeigen, dass der zentrale Grenzwertsatz im Schwanz das falsche Instrument ist, zu messen, dass sich der Logarithmus geteilt durch n einpendelt, an vier Zielen zu bestätigen, dass er sich auf eine relative Entropie einpendelt, und den Zaun mit einer fairen Bedingung beim einzelnen großen Sprung anzusetzen.

1. Bezeichnungen und Stellung

Man werfe eine faire Münze n -mal und frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass der Anteil der Köpfe a erreicht. Das ist eine Summe von Binomialkoeffizienten und lässt sich **exakt** berechnen; unten wird sie als exakter Bruch geführt.

Stichprobengrößen tragen ihre Versuchszahlen.

Stellung: Diese Reihe hält an der Arbeitsdisziplin fest, dass man, wenn eine Größe exponentiell fällt, den Exponenten und nicht das Verhältnis angibt. Dieser Aufsatz zeigt, wo diese Disziplin als Satz innerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie steht.

2. Der zentrale Grenzwertsatz ist im Schwanz das falsche Instrument

Nachprüfung 2.1: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert **0.75** erreicht, exakt und nach der Gauß-Näherung.

n	exakt	gaußsch	Verhältnis
20	0.020694733	0.012673659	1.6328932
40	0.0011107169	0.00078270113	1.4190817
80	4.2902799×10^{-6}	3.8721082×10^{-6}	1.1079959
160	$8.7622501 \times 10^{-11}$	$1.2698143 \times 10^{-10}$	0.69004185
320	$5.0734915 \times 10^{-20}$	$1.8720487 \times 10^{-19}$	0.27101279

(QED)

Beobachtung 2.2: Das Verhältnis pendelt sich nicht bei eins ein. Es kreuzt eins und fällt weiter. Der zentrale Grenzwertsatz beschreibt ein Fenster der Breite $1/\sqrt{n}$ um den Mittelwert, und eine feste Abweichung von 0.25 rückt umso weiter aus diesem Fenster, je mehr n wächst. Ihn hier zu benutzen ist keine Frage mangelnder Genauigkeit: Er ist das falsche Instrument.

3. Der Kern: den Logarithmus durch n teilen

Nachprüfung 3.1: Dieselbe Situation, gemessen wird $-\log(\text{Wahrscheinlichkeit})/n$.

n	$-\log(\text{exakt})/n$	relative Entropie	Abstand
20	0.1938938036	0.1308120359	0.0630818
50	0.1757103435	0.1308120359	0.0448983
100	0.150820182	0.1308120359	0.0200081
200	0.1424967644	0.1308120359	0.0116847
400	0.1375070082	0.1308120359	0.00669497
800	0.134589172	0.1308120359	0.00377714

(QED)

Beobachtung 3.2: Die Wahrscheinlichkeit selbst fällt von 0.0207 auf 5.1×10^{-20} , achtzehn Größenordnungen. Der Logarithmus geteilt durch n läuft von 0.194 auf 0.135, auf eine einzige Zahl zu, wobei sich der Abstand ungefähr halbiert, wann immer sich n verdoppelt (0.0200 $\rightarrow$ 0.0117 $\rightarrow$ 0.0067 $\rightarrow$ 0.0038).

Beobachtung 3.3: Hier steht die Arbeitsdisziplin der Reihe als Satz — ist die Antwort exponentiell, gib den Exponenten an und nicht das Verhältnis. Zu sagen, dass bei $n = 320$ die Gauß-Näherung um einen Faktor 3.7 danebenliegt, trägt wenig. Zu sagen, dass der Exponent 0.1308 ist, ist eine Aussage über jedes n .

4. Die Zahl, auf die sie zuläuft, ist eine relative Entropie

Nachprüfung 4.1: Das Ziel wird geändert und der Wert bei $n = 800$ mit der relativen Entropie verglichen.

Ziel	$-\log(\text{exakt})/n$	relative Entropie	Abstand
3/5	0.02322630033	0.02013551355	0.00309079
2/3	0.06074561434	0.05663301227	0.0041126
3/4	0.134589172	0.1308120359	0.00377714
9/10	0.3717403699	0.3680642072	0.00367616

(QED)

Beobachtung 4.2: Die Formel, die Aufsatz 137 als etwas untersuchte, das kein Abstand ist, erscheint hier als Exponent. Eine Formel, zwei Aufgaben — dort maß sie, wie weit zwei Gesetze auseinanderliegen, hier sagt sie, wie schnell eine Wahrscheinlichkeit stirbt.

Beobachtung 4.3: Und die Asymmetrie wird hier natürlich. „Wie wahrscheinlich sieht eine faire Münze wie eine Dreiviertel-Münze aus“ und „wie wahrscheinlich sieht eine Dreiviertel-Münze fair aus“ sind schlicht verschiedene Fragen.

5. Der Zaun ist der einzelne große Sprung

Beobachtung 5.1: Wie kommt eine große Summe tatsächlich zustande? Viele Terme, jeder ein wenig größer, oder ein Term, der davonläuft?

Nachprüfung 5.2: Summen von 100 Termen, 400000 Versuche. Die Schwelle wird für jedes Gesetz so gesetzt, dass das Ereignis gleich selten ist, ohne das der Vergleich bedeutungslos wäre. Die Tabelle gibt den Anteil der Summe, den der größte Term trägt.

Gesetz	unbedingt	oberste 1%	oberste 0.1%
exponentiell	0.0519	0.0521	0.0513
lognormal	0.0807	0.1604	0.2425
Pareto (1.5)	0.1404	0.7278	0.9180

(QED)

Beobachtung 5.3: Beim Exponentialgesetz lässt die Bedingung auf eine seltene große Summe den Anteil des größten Terms unbewegt — die Summe wuchs, weil viele Terme jeweils etwas größer waren. Beim Pareto-Gesetz nimmt der größte einzelne Term 92% der Summe ein — ein Sprung erledigte alles.

Beobachtung 5.4: Der exponentielle Abfall von Abschnitt 3 ist also eine Aussage nur über den ersten Fall. Der Zaun ist ein endliches exponentielles Moment, und wenn er bricht, ändert sich die Weise selbst, wie Seltenheit gemessen wird — eine Potenz, kein Logarithmus. Hier steht derselbe Zaun wie der, den Aufsatz 186 an den Schwanz des Fehlers setzte.

6. Die Zählung und ein Zusammenstoß von Wörtern

Beobachtung 6.1

Instrument	wo es hinsieht	wie es misst	Zaun
zentraler Grenzwert	nahe dem Mittelwert	ein Fenster der Breite $1/\sqrt{n}$	nutzlos für eine feste Abweichung
große Abweichungen	eine feste Abweichung	der Logarithmus durch n	braucht ein endliches exponentielles Moment
schwere Schwänze	ein Sprung	ein Potenzgesetz	die exponentielle Geschichte versagt

Beobachtung 6.2: Diese drei sind keine Treppe der Genauigkeit. Sie sehen auf verschiedene Orte. Es ist nicht so, dass die Gauß-Näherung einen Korrekturterm bräuchte: eine andere Größe wird gemessen.

Beobachtung 6.3: Ein Zusammenstoß von Wörtern ist festzuhalten wert. Die Wendung, die in Aufsatz 42 dieser Reihe erscheint, bezeichnet die größte Abweichung in einer numerischen Prüfung und hat nichts mit der hier genannten Theorie zu tun. Ein Fall, in dem eine Wendung zwei Dinge deckt, gefunden innerhalb der Reihe selbst.

7. Schluss

1. Der zentrale Grenzwertsatz ist im Schwanz das falsche Instrument (Nachpr. 2.1): das Verhältnis läuft von 1.63 auf 0.271 und kreuzt eins.
2. Der Logarithmus durch n pendelt sich ein (Nachpr. 3.1): die Wahrscheinlichkeit fällt achtzehn Größenordnungen, während der Exponent auf 0.135 zuläuft.
3. Der Abstand halbiert sich, wenn sich n verdoppelt (Beob. 3.2).

4. Er pendelt sich auf eine relative Entropie ein (Nachpr. 4.1): **bis auf 0.004 an vier Zielen.**
5. Der Zaun ist der einzelne große Sprung (Nachpr. 5.2): **0.0513 gegen 0.9180.**
6. Eine Wendung deckt innerhalb dieser Reihe zwei Dinge (Beob. 6.3).

Schluss: Wenn ein Ereignis äußerst selten genannt wird, lautet die nächste Frage, auf welcher Skala es gemessen wurde. Die Wahrscheinlichkeit selbst fällt durch Größenordnungen, also verliert das Sprechen in Verhältnissen die Bedeutung. Teilt man den Logarithmus durch n , bleibt eine einzige Zahl, und diese Zahl ist das, was Seltenheit ist — außer in einer Welt, in der ein Sprung genügt, wo es die Zahl überhaupt nicht gibt.

Literatur

1. Cramér, H. (1938). *Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités*. Actualités Scientifiques et Industrielles, 736.
2. Sanov, I. N. (1957). *On the Probability of Large Deviations of Random Variables*. Matematicheskii Sbornik, 42.
3. Varadhan, S. R. S. (1966). *Asymptotic Probabilities and Differential Equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 19(3).
4. Ellis, R. S. (1985). *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. New York: Springer.
5. Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin: Springer.
6. Yamagishi, Y. (2026). *The Principle of Least Action* [Aufsatz 84]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21741231
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Fisher Metric Is Unique Only on the Classical Side* [Aufsatz 133]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080550
8. Yamagishi, Y. (2026). *The KL Divergence Is Not a Distance, but Its Second Derivative Is a Metric* [Aufsatz 137]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081369
9. Yamagishi, Y. (2026). *Measuring Overlap, or Measuring Displacement* [Aufsatz 139]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081801
10. Yamagishi, Y. (2026). *A Census of the Twos* [Aufsatz 157]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091931
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Fence around Least Squares Is Linearity, Not Normality* [Aufsatz 171]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094287
12. Yamagishi, Y. (2026). *When a Proxy Becomes the Target It Stops Being a Proxy* [Aufsatz 186]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105530
13. Yamagishi, Y. (2026). *The Gaussian Is Special for More Than One Reason* [Aufsatz 187]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105639
14. Yamagishi, Y. (2026). *“Unprovable” Is Not a Property of a Sentence* [Aufsatz 189]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105830

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)