

# « Rare » se mesure sur une échelle logarithmique

— Le théorème central limite est le mauvais instrument dans la queue, et la clôture est le seul grand saut —

[Article 190]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Août 2026

— *From thinking to syncing.* —

## Résumé

Quand une probabilité chute de plusieurs ordres de grandeur, dire combien de fois une chose est plus grande qu'une autre cesse de signifier quoi que ce soit. Cet article montre, face à des valeurs combinatoires exactes, que la bonne échelle pour un événement rare est le logarithme divisé par  $n$ . **AUCUN THÉORÈME MATHÉMATIQUE NOUVEAU N'EST REVENDIQUÉ.**

Premièrement, le théorème central limite est le mauvais instrument dans la queue. Pour qu'une pièce équilibrée atteigne une moyenne de 0.75, le rapport de la probabilité exacte à l'approximation gaussienne vaut successivement 1.63, 1.42, 1.11, 0.690, 0.271 — il franchit 1 et continue de baisser (Section 2).

Deuxièmement, et c'est le cœur. La probabilité elle-même s'effondre à  $5.1 \times 10^{-20}$ , tandis que  $-\log(\text{probabilité})/n$  chemine tranquillement vers un seul nombre : 0.1939, 0.1508, 0.1346 — l'écart se réduisant à peu près de moitié chaque fois que  $n$  double (Section 3).

Troisièmement, le nombre vers lequel il chemine est une entropie relative. En changeant la cible en 3/5, 2/3, 3/4 et 9/10, la valeur en  $n = 800$  concorde avec l'entropie relative à 0.004 près (Section 4).

Quatrièmement, la clôture est le seul grand saut. En conditionnant sur une grande somme rare, la part portée par le plus grand terme ne bouge pas pour la loi exponentielle, passant de 0.0519 à 0.0513, tandis que pour une loi de Pareto elle bondit de 0.1404 à **0.9180** (Section 5).

Cinquièmement, une collision de mots est consignée. L'expression qui apparaît dans l'Article 42 de ce corpus désigne le plus grand écart d'une vérification numérique et n'a rien à voir avec la théorie nommée ici (Section 6).

Portée (scope note) : AUCUN THÉORÈME MATHÉMATIQUE NOUVEAU N'EST REVENDIQUÉ — le théorème de Cramér, les fonctions de taux, le théorème de Sanov et le principe du seul grand saut pour les queues lourdes sont tous classiques. Et aucun théorème n'est démontré ici — ce qui est montré est une suite de nombres à  $n$  fini, et l'existence de la limite est citée. Sur l'Article 187 : cet article a réparti en quatre raisons pourquoi la limite est gaussienne. La question ici est ce qui gouverne là où le gaussien ne vaut pas, une autre question. Sur l'Article 137 : cet article a examiné l'entropie relative comme quelque chose qui n'est pas une distance. Ici la même formule apparaît comme un exposant — un outil, deux tâches. Ce qui est ajouté, c'est montrer face à des valeurs exactes que le théorème central limite est le mauvais instrument dans la queue, mesurer que le logarithme divisé par  $n$  se stabilise, confirmer sur quatre cibles qu'il se stabilise sur une entropie relative, et placer la clôture au seul grand saut avec un conditionnement équitable.

## 1. Notations et position

Lançons une pièce équilibrée  $n$  fois et demandons la probabilité que la fraction de faces atteigne  $a$ . C'est une somme de coefficients binomiaux et elle peut se calculer **exactement** ; ci-dessous elle est conservée comme fraction exacte. Les grandeurs échantillonnées portent leur nombre d'essais.

**Position** : Ce corpus s'en tient à une discipline de travail : quand une grandeur décroît exponentiellement, on rapporte l'exposant et non le rapport. Cet article montre où cette discipline se tient comme théorème à l'intérieur des probabilités.

## 2. Le théorème central limite est le mauvais instrument dans la queue

**Vérification 2.1** : La probabilité que la moyenne atteigne **0.75**, exacte et selon l'approximation gaussienne.

| $n$ | exacte                      | gaussienne                  | rapport           |
|-----|-----------------------------|-----------------------------|-------------------|
| 20  | 0.020694733                 | 0.012673659                 | 1.6328932         |
| 40  | 0.0011107169                | 0.00078270113               | 1.4190817         |
| 80  | $4.2902799 \times 10^{-6}$  | $3.8721082 \times 10^{-6}$  | 1.1079959         |
| 160 | $8.7622501 \times 10^{-11}$ | $1.2698143 \times 10^{-10}$ | 0.69004185        |
| 320 | $5.0734915 \times 10^{-20}$ | $1.8720487 \times 10^{-19}$ | <b>0.27101279</b> |

(CQFD)

**Observation 2.2 :** Le rapport ne se stabilise pas à un. Il franchit un et continue de baisser. Le théorème central limite décrit une fenêtre de largeur  $1/\sqrt{n}$  autour de la moyenne, et un écart fixe de 0.25 sort d’autant plus de cette fenêtre que  $n$  grandit. L’utiliser ici n’est pas une question de précision insuffisante : c’est le mauvais instrument.

### 3. Le cœur : diviser le logarithme par $n$

---

**Vérification 3.1 :** Le même cadre, en mesurant  $-\log(\text{probabilité})/n$ .

| $n$ | $-\log(\text{exacte})/n$ | entropie relative   | écart             |
|-----|--------------------------|---------------------|-------------------|
| 20  | 0.1938938036             | 0.1308120359        | 0.0630818         |
| 50  | 0.1757103435             | 0.1308120359        | 0.0448983         |
| 100 | 0.150820182              | 0.1308120359        | 0.0200081         |
| 200 | 0.1424967644             | 0.1308120359        | 0.0116847         |
| 400 | 0.1375070082             | 0.1308120359        | 0.00669497        |
| 800 | <b>0.134589172</b>       | <b>0.1308120359</b> | <b>0.00377714</b> |

(CQFD)

**Observation 3.2 :** La probabilité elle-même tombe de 0.0207 à  $5.1 \times 10^{-20}$ , dix-huit ordres de grandeur. Le logarithme divisé par  $n$  chemine de 0.194 à 0.135, vers un seul nombre, l’écart se réduisant à peu près de moitié chaque fois que  $n$  double ( $0.0200 \rightarrow 0.0117 \rightarrow 0.0067 \rightarrow 0.0038$ ).

**Observation 3.3 :** C’est là que la discipline de travail du corpus se tient comme théorème — quand la réponse est exponentielle, rappez l’exposant et non le rapport. Dire qu’en  $n = 320$  l’approximation gaussienne se trompe d’un facteur 3.7 apporte peu. Dire que l’exposant vaut 0.1308 est un énoncé sur tout  $n$ .

### 4. Le nombre vers lequel il chemine est une entropie relative

---

**Vérification 4.1 :** On change la cible et on compare la valeur en  $n = 800$  avec l’entropie relative.

| cible | $-\log(\text{exacte})/n$ | entropie relative | écart      |
|-------|--------------------------|-------------------|------------|
| 3/5   | 0.02322630033            | 0.02013551355     | 0.00309079 |
| 2/3   | 0.06074561434            | 0.05663301227     | 0.0041126  |
| 3/4   | 0.134589172              | 0.1308120359      | 0.00377714 |
| 9/10  | 0.3717403699             | 0.3680642072      | 0.00367616 |

(CQFD)

**Observation 4.2 :** La formule que l’Article 137 a examinée comme quelque chose qui n’est pas une distance apparaît ici comme un exposant. Une formule, deux tâches — là elle mesurait l’éloignement de deux lois, ici elle dit à quelle vitesse une probabilité meurt.

**Observation 4.3 :** Et l’asymétrie devient ici naturelle. « Quelle est la probabilité qu’une pièce équilibrée ressemble à une pièce à trois quarts » et « quelle est la probabilité qu’une pièce à trois quarts ressemble à une pièce équilibrée » sont tout simplement des questions différentes.

## 5. La clôture est le seul grand saut

**Observation 5.1 :** Comment une grande somme se produit-elle réellement ? Beaucoup de termes chacun un peu plus grand, ou un terme qui s’emballe ?

**Vérification 5.2 :** Sommes de 100 termes, 400000 essais. Le seuil est fixé pour chaque loi de sorte que l’événement soit également rare, faute de quoi la comparaison n’aurait pas de sens. Le tableau donne la part de la somme portée par le plus grand terme.

| loi           | non conditionnée | premiers 1% | premiers 0.1% |
|---------------|------------------|-------------|---------------|
| exponentielle | 0.0519           | 0.0521      | <b>0.0513</b> |
| log-normale   | 0.0807           | 0.1604      | 0.2425        |
| Pareto (1.5)  | 0.1404           | 0.7278      | <b>0.9180</b> |

(CQFD)

**Observation 5.3 :** Pour la loi exponentielle, conditionner sur une grande somme rare laisse la part du plus grand terme immobile — la somme a grandi parce que beaucoup de termes étaient chacun un peu plus grands. Pour la loi de Pareto, le plus grand terme à lui seul prend 92% de la somme — un saut a tout fait.

**Observation 5.4 :** La décroissance exponentielle de la Section 3 est donc un énoncé sur le premier cas seulement. La clôture est un moment exponentiel fini, et quand elle cède, la manière même de mesurer la rareté change — une puissance, non un logarithme. La même clôture se tient ici que celle que l’Article 186 a placée à la queue de l’erreur.

## 6. Le recensement, et une collision de mots

---

### Observation 6.1

| instrument         | où il regarde      | comment il mesure                   | clôture                          |
|--------------------|--------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| central limite     | près de la moyenne | une fenêtre de largeur $1/\sqrt{n}$ | inutile pour un écart fixe       |
| grandes déviations | un écart fixe      | le logarithme sur $n$               | exige un moment exponentiel fini |
| queues lourdes     | un saut            | une loi de puissance                | le récit exponentiel échoue      |

**Observation 6.2 :** Ces trois ne sont pas un escalier de précision. Ils regardent des endroits différents. Ce n’est pas que l’approximation gaussienne ait besoin d’un terme correctif : une grandeur différente est mesurée.

**Observation 6.3 :** Une collision de mots mérite d’être consignée. L’expression qui apparaît dans l’Article 42 de ce corpus désigne le plus grand écart d’une vérification numérique et n’a rien à voir avec la théorie nommée ici. Un cas où une expression couvre deux choses, trouvé à l’intérieur même du corpus.

## 7. Conclusion

---

1. Le théorème central limite est le mauvais instrument dans la queue (Vér. 2.1) : le rapport va de 1.63 à 0.271, franchissant un.
2. Le logarithme sur  $n$  se stabilise (Vér. 3.1) : la probabilité chute de dix-huit ordres tandis que l’exposant chemine vers 0.135.
3. L’écart se réduit de moitié quand  $n$  double (Obs. 3.2).
4. Il se stabilise sur une entropie relative (Vér. 4.1) : à 0.004 près sur quatre cibles.
5. La clôture est le seul grand saut (Vér. 5.2) : 0.0513 contre 0.9180.

## 6. Une expression couvre deux choses à l'intérieur de ce corpus (Obs. 6.3).

**Conclusion :** Quand un événement est dit extrêmement rare, la question suivante est sur quelle échelle il a été mesuré. La probabilité elle-même chute de plusieurs ordres de grandeur, si bien que parler en rapports perd son sens. Divisez le logarithme par  $n$  et il reste un seul nombre, et ce nombre est ce qu'est la rareté — sauf dans un monde où un saut suffit, où ce nombre n'existe pas du tout.

## Références

---

1. Cramér, H. (1938). *Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités*. Actualités Scientifiques et Industrielles, 736.
2. Sanov, I. N. (1957). *On the Probability of Large Deviations of Random Variables*. Matematicheskii Sbornik, 42.
3. Varadhan, S. R. S. (1966). *Asymptotic Probabilities and Differential Equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 19(3).
4. Ellis, R. S. (1985). *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. New York: Springer.
5. Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin: Springer.
6. Yamagishi, Y. (2026). *The Principle of Least Action* [Article 84]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21741231
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Fisher Metric Is Unique Only on the Classical Side* [Article 133]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080550
8. Yamagishi, Y. (2026). *The KL Divergence Is Not a Distance, but Its Second Derivative Is a Metric* [Article 137]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081369
9. Yamagishi, Y. (2026). *Measuring Overlap, or Measuring Displacement* [Article 139]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081801
10. Yamagishi, Y. (2026). *A Census of the Twos* [Article 157]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091931
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Fence around Least Squares Is Linearity, Not Normality* [Article 171]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094287
12. Yamagishi, Y. (2026). *When a Proxy Becomes the Target It Stops Being a Proxy* [Article 186]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105530
13. Yamagishi, Y. (2026). *The Gaussian Is Special for More Than One Reason* [Article 187]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105639
14. Yamagishi, Y. (2026). *“Unprovable” Is Not a Property of a Sentence* [Article 189]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105830

---

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)