

「小さな世界」は、三つの別の主張である

— 短い経路はただで手に入り、裾の重さはそこから従わない — [論文192]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「この網は小さな世界だ」という言い方は、少なくとも三つの別の主張を一つにまとめている。本稿はそれを分け、どれがどれから従わないかを数で示す。新しい数学定理は主張しない。第一に、短い経路はただで手に入る。頂点 **1000**、平均次数 **10** で、構造を一切持たない無作為な網の平均経路長は **3.26** であった——短い経路は設計の証拠にならない（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。短い経路と局所的な固まりは別の辺が担っている。環の辺を **1%** だけ張り替えると、平均経路長は **50.45** から **8.75**（もとの **17.3%**）へ落ちるのに、クラスター係数は **0.6667** から **0.6446**（もとの **96.7%**）しか動かない（第3節）。第三に、「次数の裾が重い」はそこから従わない。**10%** 張り替えた環では最大次数が平均の **1.40** 倍にすぎないが、優先的選択で作った網では **14.50** 倍（最大次数 **142**）であった（第4節）。第四に、柵は二次モーメントである。平均次数がどれも **10** でありながら、 $\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ は **10.00**、**11.00**、**10.10**、**22.20** と分かれた（第5節）。第五に、本稿は現実の網について何も主張しない——扱うのは、こちらで生成した四種類の網だけである。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない——ワッツ＝ストログッツの構成、優先的選択、広がり の閾値に二次モーメントが現れることは、いずれも標準的である。実在の網（社会・生物・技術）について何も主張しない——現実の次数分布が何であるかは、本稿の扱う問いではない。扱うのは生成した網の測定だけである。語について：論文176は「小さい」という語が測度と圏論的な大きさとで別物になることを書いた。本稿の「小さい」はそのどちらでもない第三の用法である——同じ語が、また別の場所で分かれている。加えたのは三つの主張を「何が担うか」で分けたこと、**1%** の張り替えて二つが独立に動くことを測ったこと、短い経路から裾の重さが従わないことを反例で示したこと、柵を二次モーメントに置いたことである。

1. 記法と位置づけ

頂点 **1000**、平均次数 **10** の無向な網を四種類つくる——環（各頂点を円周上の近い **10** 個と結ぶ）、無作為な網、環の辺を割合 p だけ張り替えたもの、優先的選択で育てたもの。平均経路長は無作為に選んだ **200** 個の頂

点から幅優先探索で測り、クラスター係数は各頂点の隣人どうしが結ばれている割合の平均とする。すべて自前の計算である。

位置づけ：論文186 は柵を誤差の裾に置き、論文190 は稀さの柵を指数モーメントに置いた。本稿はその並びに、網の広がりやすさを加える——そしてまた、平均が隠している。

2. 短い経路は、ただで手に入る

検算 2.1

網	平均経路長	クラスター係数
環	50.4505	0.6667
無作為	3.2648	0.0100

(証明終)

観察 2.2

構造を一切持たない網が、すでに短い経路を持っている。したがって「六次の隔たり」のような観察は、それ自体では何の証拠にもならない——無作為さがただで与えるものだからである。

観察 2.3

驚くべきなのは短い経路そのものではなく、短い経路と高いクラスター係数が同居していることである。環は固まっているが遠く、無作為は近いが固まっていない。どちらも「小さな世界」ではない。

3. 芯：二つは別の辺が担っている

検算 3.1：環の辺を割合 p だけ張り替える。

p	平均経路長	クラスター係数	経路（環比）	固まり（環比）
0	50.4505	0.6667	1.0000	1.0000
0.001	34.0233	0.6654	0.6744	0.9980
0.01	8.7452	0.6446	0.1733	0.9668
0.05	5.3227	0.5823	0.1055	0.8734
0.2	3.8093	0.3356	0.0755	0.5034
1.0	3.2601	0.0080	0.0646	0.0119

（証明終）

観察 3.2

1%の張り替えで、経路は17%まで落ちるのに固まりは97%残る。二つの量は、別の辺が担っている
のである——距離を決めているのは少数の近道、固まりを決めているのは多数の近所づきあいの辺。

観察 3.3

したがって「小さな世界」という語が名指しているのは、二つの性質のどちらでもなくその組である。
片方だけを測って「小さな世界だ」と言うことはできない。

4. 「次数の裾が重い」は、そこから従わない

検算 4.1

網	平均次数	最大次数	標準偏差	最大／平均
環	10.00	10	0.00	1.00
無作為	10.00	21	3.17	2.10
10% 張り替え	10.00	14	0.98	1.40
優先的選択	9.79	142	10.50	14.50

(証明終)

観察 4.2

10% 張り替えた環は立派な「小さな世界」でありながら、次数はどれも似たり寄ったりである。一方、優先的選択で育てた網には平均の 14.5 倍の頂点がある。短い経路から裾の重さは従わない——別々のことについての、別々の主張である。

観察 4.3

そして裾の重さを担っているのは生成の仕方である——既に多く結ばれた頂点がさらに結ばれる、という育ち方だけが、それを作る。

5. 柵は、二次モーメントである

観察 5.1

網の上で何かが広がるとき、閾値を決めるのは平均次数ではなく $\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ である。

検算 5.2

網	平均次数	$\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$	平均との比
環	10.000	10.000	1.000
無作為	10.000	11.004	1.100
10% 張り替え	10.000	10.099	1.010
優先的選択	9.786	22.197	2.268

(証明終)

観察 5.3

平均次数はどれも 10 前後で揃っているのに、閾値に入る量は倍以上違う。平均が隠しているのである。

観察 5.4

これは体系の中で三度目の同じ形である——論文186 は柵を誤差の裾に置き、論文190 は稀さの柵を指数モーメントに置いた。いずれも平均では決まらず、裾が決める。ここでも、平均次数を揃えても振る舞いは揃わない。

6. 点呼

観察 6.1

何を「小さい」と呼ぶか	何が担うか	注意
経路が短い	少数の近道	無作為でただで手に入る
局所的に固まる	多数の近所の辺	経路とは別の辺
次数の裾が重い	生成の仕方	経路の長さから従わない
広がりやすい	二次モーメント	平均次数では決まらない

観察 6.2

四つは強さの階段ではない。最初の二つは距離についての言明、三つ目は分布についての言明、四つ目はその上で起きることについての言明である。一語で呼ぶから、一つを見れば残りも分かると思ってしまう。

観察 6.3

語について一つ。論文176は「小さい」が測度零と第一類で別物になることを書いた。本稿の「小さい」はそのどちらでもない——同じ語が、また別の場所で分かれている。

7. 結論

1. 短い経路はただで手に入る（検算2.1）：無作為な網で **3.26**。
2. 二つは別の辺が担う（検算3.1）：1%の張り替えで経路 **17%**、固まり **97%**。
3. 裾の重さは従わない（検算4.1）：最大／平均が **1.40** 対 **14.50**。
4. 柵は二次モーメント（検算5.2）：平均次数が同じでも **10.10** 対 **22.20**。
5. 四つは強さの階段ではない（観察6.2）。

結び：「この網は小さな世界だ」と言われたら、次に問うべきはどの意味でかである。経路が短いのか、固まっているのか、大きな頂点があるのか、それとも何かが広がりやすいのか。最初の一つは無作為さがただで与え、最後の一つは平均次数では決まらない——四つは、別々に確かめるほかない。

参考文献

1. Milgram, S. (1967). *The Small World Problem*. Psychology Today, 2(1).
2. Watts, D. J., Strogatz, S. H. (1998). *Collective Dynamics of Small-World Networks*. Nature, 393(6684).
3. Barabási, A.-L., Albert, R. (1999). *Emergence of Scaling in Random Networks*. Science, 286(5439).
4. Pastor-Satorras, R., Vespignani, A. (2001). *Epidemic Spreading in Scale-Free Networks*. Physical Review Letters, 86(14).
5. Clauset, A., Shalizi, C. R., Newman, M. E. J. (2009). *Power-Law Distributions in Empirical Data*. SIAM Review, 51(4).
6. 山岸勇輝 (2026). フラクタル次元 [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
7. 山岸勇輝 (2026). 集約の三つの別根 [論文124]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22057728
8. 山岸勇輝 (2026). 重なりか、隔たりか [論文139]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081801
9. 山岸勇輝 (2026). 「小さい」は二つあって、両立しない [論文176]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22097994
10. 山岸勇輝 (2026). 「次元の呪い」は一つの呪いではない [論文182]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22104170
11. 山岸勇輝 (2026). 代理を目標にすると、代理でなくなる [論文186]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105530
12. 山岸勇輝 (2026). 正規分布が特別である理由は、一つではない [論文187]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105639
13. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
14. 山岸勇輝 (2026). 均すはずのものが、模様を作る [論文191]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106439

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)