

「安定」は六つの別の言葉であり、分けているのは何を揺らすかである

— 鞍点と中心は互いを含意しない：線形化を囲っている柵は双曲性である — [論文195]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文185は「安定」が一語で二つを指すことを書いた。本稿はそこに四つを足し、六つを分けている分離子が何を揺らすかであることを数で示す。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、「留まる」と「戻る」は別である。中心のまわりでは軌道は半径を 10^{-14} の精度で保ち、いくらでも近くに留まるが、一度も近づかない（第2節）。第二に、「戻る」と「決まった速さで戻る」も別である。 $\dot{x} = -x^3$ では半分になるのに 1.50、6.00、24.00、96.00 と毎回四倍かかり、実効的な減衰率は $T = 10$ の 1.52×10^{-1} から $T = 10^6$ の 7.25×10^{-6} へゼロに滑り落ちる（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。「引き込む」と「留まる」は別である。 $\dot{\theta} = 1 - \cos \theta$ ではすべての軌道が不動点に収束するのに、0.001 の距離から出発した軌道は 3.141380 ままで離れてから帰ってくる——出発点を近づけるほど、遠出は π に近づく（第4節）。第四に、状態を揺らすことと方程式を揺らすことは別である。中心に ϵ の摂動を入れると、 $\epsilon = \pm 10^{-6}$ という大きさでも符号だけで内巻きと外巻きが決まる（第5節）。第五に、六つは互いに独立である。鞍点は構造的に安定でリャプノフ不安定、中心はリャプノフ安定で構造的に不安定——どちらの向きの含意も成り立たない（第6節）。第六に、線形化を囲っている柵は双曲性である。 $\dot{x} = -x^3$ と $\dot{x} = +x^3$ は線形化が同じ（恒等的にゼロ）なのに、片方は収束し片方は有限時間で無限大に達する（第7節）。

本稿の射程 (scope note)：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——リャプノフ安定性、漸近安定性、指数安定性、構造安定性、ハートマン＝グロブマンの定理は、いずれも標準的である。安定性の判定法を提案しない——本稿は既存の六つの定義を分けて並べるだけである。無限次元系を扱わない——数値はすべて一次元か二次元の常微分方程式である。構造安定性を一般に判定しない——本稿が示すのは反例であり、どの系が構造的に安定かの分類ではない。論文185 との関係：185 は欠陥の分類を扱い、その途中で「安定」が位相的とエネルギー的の二つを指すことを書いた。本稿はその二つにリャプノフ・漸近・指数・構造の四つを足し、六つ全部を一つに分離子で並べる。論文161 との関係：161 は「不動点」が一つの定理ではないことを点呼した——あちらは不動点が在るかの点呼であり、本稿はその不動点がどういう意味で安定かの点呼である。加えたのは「引き込む」と「留まる」が別であることを、 π まで遠出する軌道で数値化したこと、減衰率がゼロへ滑り落ちる様子を六桁にわたって測ったこと、鞍点と中心が互いを含意しないことを二千回の摂動で確かめたこと、柵が双曲性であることを同一の線形化を持つ二つの系で示したことである。

1. 記法と位置づけ

常微分方程式 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ と、その不動点 $\mathbf{y}_*$ を考える。数値積分はすべて自前の四次ルンゲ＝クッタであり、閉じた形が存在する場合はそれと突き合わせた。

位置づけ：論文185 は欠陥の分類を書いた途中で、「安定」が一語で二つを指すことを記した——位相的に安定（連続変形では消せない）と、エネルギー的に安定（最小にいる）である。本稿はそこから続ける。力学系の側にはさらに四つあり、六つを分けているものは何を揺らすかという一問である。

2. 「留まる」と「戻る」は別である

検算 2.1：中心 $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ を $T = 200$ まで積分し、半径を測る。

初期半径	最大の半径	最小の半径	初期値からのずれ
1.0	1.000000000000	1.000000000000	2.82×10^{-14}
0.1	0.100000000000	0.100000000000	1.78×10^{-15}
0.01	0.010000000000	0.010000000000	3.52×10^{-16}

半径は動かない。ずれは積分器の丸めの大きさである。

観察 2.2

これはリャプノフ安定だが、漸近安定ではない。どんな ε を指定されても、それより近くから出発すれば ε の内側に留まり続ける——しかし不動点には一度も近づかない。「乱しても大丈夫」と「乱しても元に戻る」は、別の主張である。

3. 「戻る」と「決まった速さで戻る」も別である

検算 3.1 : $\dot{x} = -x^3$ を $x(0) = 1$ から積分する。閉じた形は $x(t) = 1/\sqrt{1+2t}$ である。

t	数値	閉じた形	比較のための e^{-t}
1	0.577350269190	0.577350269190	3.679×10^{-1}
10	0.218217890236	0.218217890236	4.540×10^{-5}
100	0.070534561586	0.070534561586	3.720×10^{-44}
1000	0.022355091700	0.022355091700	0 (倍精度で)

検算 3.2 : 半分になるまでの時間は閉じた形で $3/(2x^2)$ である。

いまの値	半分になるまで	前の行の何倍か
1	1.50	—
0.5	6.00	4
0.25	24.00	4
0.125	96.00	4

検算 3.3 : 指数安定であるためには、ある固定した $\alpha > 0$ について $|x(t)| \leq C|x(0)|e^{-\alpha t}$ でなければならない。実効的な減衰率 $-\log x(t)/t$ を測る。

T	$x(T)$	実効的な減衰率
10	0.218217890235992	1.5223×10^{-1}
100	0.070534561585860	2.6517×10^{-2}
1000	0.022355091700495	3.8007×10^{-3}
10^4	0.007070891041799	4.9518×10^{-4}
10^5	0.002236062387351	6.1030×10^{-5}
10^6	0.000707106604410	7.2543×10^{-6}

観察 3.4

率はゼロへ滑り落ちる。どんな $\alpha > 0$ を出しても、十分大きい T でそれを下回る。ゆえにこの系は漸近安定であって指数安定ではない——「戻る」は言えるが「速さ」は言えない。数値と閉じた形は $T = 1000$ で 2.3×10^{-16} しか違わない——率が落ちるのは積分の誤差ではない。

4. 「引き込む」と「留まる」も別である

円周上の系 $\dot{\theta} = 1 - \cos \theta$ を考える。右辺は $\theta = 0$ 以外で正であり、 $\theta = 0$ が唯一の不動点である。 θ が増える向きにしか動けないので、 $\theta = 0$ のすぐ右から出発した点は円周を一周してから戻ることになる。

検算 4.1：不動点からの距離（円周上の距離）の最大値を測る。

出発点	到達した最大の距離	終端での距離
+0.1	3.108379	0.000010
+0.01	3.138380	0.000010
+0.001	3.141380	0.000010
−0.1	0.100000	0.009092
−0.01	0.010000	0.005000

（円周上の距離の最大値は $\pi = 3.141593$ である。）

観察 4.2

すべての軌道が不動点に収束するのに、この不動点はリャプノフ安定ではない。 $\varepsilon = 1$ という緩い要求すら満たせない——0.001 の距離から出発した軌道が 3.14 まで離れるからである。しかも出発点を近づけるほど遠出は大きくなり、 π に近づいていく。

観察 4.3

「引き込む」は「留まる」を含意しない。左側から出発した軌道は最初から最後まで 0.1 の内側にいる——同じ不動点について、どちら側から近づいたかで答が変わる。リャプノフ安定性の定義に「すべての」が入っているのは、この一点のためである。

5. 状態を揺らすことと、方程式を揺らすことは別である

第2節から第4節までは初期状態を揺らしていた。ここでは方程式そのものを揺らす。

検算 5.1：中心に摂動を入れて $\dot{x} = y + \varepsilon x$ 、 $\dot{y} = -x + \varepsilon y$ とする。半径は $r(t) = r(0)e^{\varepsilon t}$ である。

ε	数値の $r(200)$	$e^{200\varepsilon}$	行き先
-10^{-2}	0.135335283236625	0.135335283236613	内巻き
-10^{-4}	0.980198673306768	0.980198673306755	内巻き
-10^{-6}	0.999800019998671	0.999800019998667	内巻き
0	1.000000000000012	1	閉軌道
$+10^{-6}$	1.000200020001309	1.000200020001333	外巻き
$+10^{-4}$	1.020201340026755	1.020201340026756	外巻き
$+10^{-2}$	7.389056098929894	7.389056098930650	外巻き

$\varepsilon = 0$ の行の末尾の 12 は積分器の丸め (1.2×10^{-14}) であり、軌道は閉じている。

観察 5.2

摂動の大きさではなく符号が決めている。 10^{-6} という摂動でも、正なら外へ、負なら内へ行く。ゆえに中心は構造的に安定ではない——どれほど小さい近傍を取っても、そのなかに位相像の違う系がある。

検算 5.3：同じことは第3節の系にも起きる。 $\dot{x} = -x^3 + \varepsilon x$ とすると、原点での線形化は ε になり、 $\varepsilon > 0$ では $\pm\sqrt{\varepsilon}$ に新しい不動点生まれる。

ε	T	$x(T)$ ($x(0) = 10^{-3}$)	行き先
-10^{-2}	2000	0.000000000	0 へ
-10^{-4}	20000	0.000134676	0 へ
0	20000	0.000980581	0 へ（ただし遅い）
$+10^{-4}$	20000	0.005962055	$\sqrt{\varepsilon} = 0.0100$ へ
$+10^{-2}$	2000	0.100000000	$\sqrt{\varepsilon} = 0.1000$ へ

観察 5.4

漸近安定であることは構造安定であることを含意しない。 $\dot{x} = -x^3$ の原点は漸近安定だが、 εx をいくら小さく足しても、正の符号なら原点は不安定になる。

6. 六つは互いに独立である

検算 6.1：鞍点 $\dot{x} = x$ 、 $\dot{y} = -y$ の係数行列に大きさ 10^{-2} の乱数摂動を 2000 回加え、固有値を測る。

結果：2000 回すべてで固有値は実数のまま、符号は正と負に分かれたままだった（虚部の最大値は 0）。すなわち位相像は変わらない——鞍点は構造的に安定である。

検算 6.2：同じ鞍点で、 x の初期値を小さくしながら $T = 30$ まで走らせる。

$x(0)$	$x(30)$
10^{-3}	1.068647×10^{10}
10^{-6}	1.068647×10^7
10^{-9}	1.068647×10^4

どれほど近くから出発しても、あらゆる近傍を出る——鞍点はリャプノフ不安定である。

検算 6.3 (独立性の表) :

系	リャプノフ安定	漸近安定	構造安定
中心 $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$	はい	いいえ	いいえ
安定結節点 $\dot{x} = -x, \dot{y} = -y$	はい	はい	はい
鞍点 $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$	いいえ	いいえ	はい
$\dot{x} = -x^3$	はい	はい	いいえ

観察 6.4

鞍点と中心が、どちらの向きの含意も壊している。鞍点は構造的に安定でリャプノフ不安定、中心はリャプノフ安定で構造的に不安定。ゆえに「構造安定ならば安定」も「安定ならば構造安定」も偽である。二つは強弱の関係ではなく、別の問いである。

7. 柵は双曲性である

検算 7.1 : $\dot{x} = -x^3$ と $\dot{x} = +x^3$ は、原点での線形化がどちらも恒等的にゼロである。行き先を測る。

系	原点での線形化	$x(0) = 0.1$ からの行き先
$\dot{x} = -x^3$	0	$t = 1000$ で 0.0224 、ゆっくり 0 へ
$\dot{x} = +x^3$	0	$t = 50$ で無限大に達する
$\dot{x} = -x$	-1	$t = 20$ で 2.061154×10^{-10}

検算 7.2 : $\dot{x} = +x^3$ の閉じた形は $x(t) = x_0 / \sqrt{1 - 2x_0^2 t}$ であり、 $x_0 = 0.1$ なら $t = 50$ で発散する。

t	数値	閉じた形
20	0.129099445	0.129099445
40	0.223606798	0.223606798
49	0.707106781	0.707106781
49.9	2.236067978	2.236067977

観察 7.3 （柵の住所）

「固有値が安定性を決める」という言い方を囲っている柵は、双曲性である——すなわち、どの固有値も実部がゼロでないこと。柵の内側ではハートマン＝グロブマンの定理が線形化と非線形系を局所的に結びつけ、固有値が答を決める。柵の外では、同じ線形化を持つ二つの系が収束と有限時間での発散に分かれる。論文171 は最小二乗を囲う柵を線形性と、論文177 は連続性の議論を囲う柵をコンパクト性と特定した——ここでは柵は双曲性である。

観察 7.4

中心はまさにこの柵の上に載っている。固有値は純虚数であり実部はゼロである——だから線形化は答を持たず、だから第5節で摂動の符号が答を決めた。第5節と第7節は同じ一つの事実の二つの現れである。

8. 分離子：何を揺らすか

観察 8.1

六つの「安定」を、揺らす対象で並べる。

呼び名	何を揺らすか	何を問うか
リアプノフ安定	初期状態	近くに留まるか
漸近安定	初期状態	戻ってくるか
指数安定	初期状態	決まった速さで戻るか
構造安定	ベクトル場そのもの	位相像が変わらないか
位相的に安定（論文185）	配位を連続に	消せないか
エネルギー的に安定（論文185）	尺度	最小にいるか

観察 8.2

六つは強さの階段ではない。最初の三つは階段をなす（指数ならば漸近、漸近ならばリアプノフ）が、四番目はその階段の外にある——検算6.3 が示したとおり、どちらの向きの含意も無い。そして最後の二つは、そもそも力学系ではなく場の配位についての言葉である。

観察 8.3

ゆえに「この系は安定である」という文だけでは、何も伝わっていない。伝わるのは何を揺らしたかを添えたときだけである。

9. 点呼と結び

本稿が確かめたことを並べる。

1. 留まると戻るは別（検算2.1）：中心は半径を 10^{-14} の精度で保ち、一度も近づかない。
2. 戻ると「速さ」は別（検算3.2、3.3）：半減に毎回四倍かかり、実効的な率は 10^{-1} から 10^{-6} へ滑り落ちる。
3. 引き込むと留まるは別（検算4.1）：0.001 から出発して 3.141380 まで離れる。
4. 状態を揺らすことと方程式を揺らすことは別（検算5.1）： 10^{-6} の摂動でも符号が行き先を決める。
5. 六つは互いに独立（検算6.3）：鞍点は構造安定でリアプノフ不安定、中心はその逆。
6. 柵は双曲性（検算7.1）：同じ線形化を持つ二つの系が、収束と有限時間発散に分かれる。

7. 分離子は「何を揺らすか」(観察8.1)。

結び:「この不動点は安定である」と言われたら、次に問うべきは何を揺らしての話かである。初期状態か、方程式そのものか、配位か、尺度か。四つの答は四つの別の主張であり、そして本稿が測ったとおり、それらは互いに含意しない——鞍点は方程式を揺らしても平気だが、状態を少し揺らせば逃げていく。中心はその逆である。論文185は「安定」に二つの根を見つけた——数えなおすと六つあり、六つを分けているのは何を手に取って揺らすかという、それだけの違いであった。

参考文献

1. Lyapunov, A. M. (1892). *The General Problem of the Stability of Motion*. Kharkov Mathematical Society. English translation: International Journal of Control, 55(3), 1992.
2. Andronov, A. A., Pontryagin, L. S. (1937). *Systèmes Grossiers*. Doklady Akademii Nauk SSSR, 14.
3. Hartman, P. (1960). *A Lemma in the Theory of Structural Stability of Differential Equations*. Proceedings of the American Mathematical Society, 11(4).
4. Grobman, D. M. (1959). *Homeomorphism of Systems of Differential Equations*. Doklady Akademii Nauk SSSR, 128.
5. Peixoto, M. M. (1962). *Structural Stability on Two-Dimensional Manifolds*. Topology, 1(2).
6. Hirsch, M. W., Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. New York: Academic Press.
7. 山岸勇輝 (2026). 最小エントロピー生成は、原理ではなく柵つきの定理である [論文143]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082367
8. 山岸勇輝 (2026). 「不動点」は一つの定理ではない [論文161]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092530
9. 山岸勇輝 (2026). 最小二乗を囲っている柵は、正規分布ではなく線形性である [論文171]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094287
10. 山岸勇輝 (2026). 量子子の順序が、中身のすべてである [論文177]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098103
11. 山岸勇輝 (2026). 欠陥を分類しているのは、方程式ではなく行き先の空間である [論文185]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105496
12. 山岸勇輝 (2026). 均すはずのものが、模様を作る [論文191]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106439
13. 山岸勇輝 (2026). 四つの平均は一つの族であり、等号の柵は一つしかない [論文194]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106809

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)