

「収束する」は四つの別の主張であり、分けているのは何を捨てることを許すかである

— どの点でも収束しないのに積分は消える列がある：零集合か、小さい集合か、部分列以外か — [論文197]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

関数の列が「収束する」と言われたとき、それは少なくとも四つの別の主張のどれかである。本稿はその四つが互いに従わないことを数で示し、四つを分けている分離子が何を捨てることを許すかであることを書く。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、これが本稿の芯である。どの点でも収束しないのに、積分は消える列がある。二進区間を掃くタイプライター列を $n = 200000$ まで走らせ、 20000 個の点で調べると、収束した点は 0 個 (0.000000%) であった——同じ列の L^1 ノルムは 1.5×10^{-5} である (第2節)。第二に、それでも部分列は概収束する。各ブロックの最初だけを拾うと、 $k = 20$ で 20000 点のうち 1 を返す点は 0 個になった (第3節)。第三に、一様でないのは「はしの一点」のせいではない。 x^n の遷移帯の幅に n を掛けると 2.197198 に収束する ($\log 9 = 2.197225$) ——グラフは平らにならず、形を保ったまま右へ滑っていく (第4節)。第四に、その滑る点に乗ると値は動かない。 $x = 1 - 1/n$ で x^n を測ると $n = 10^6$ で 0.367879257 であり、 $1/e = 0.367879441$ に張りついている (第4節)。第五に、捨ててよい集合を小さくすると代償が出る。右端から長さ δ を捨てれば x^n は一様収束するが、 $\delta = 10^{-6}$ で必要な n は 4605168 である—— δ を 100 分の 1 にすると n は 100 倍になる (第5節)。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——エゴロフの定理、リースの定理、タイプライター列は、いずれも標準的である。収束の判定法を提案しない——既存の四つの定義を分けて並べるだけである。優収束定理の柵を扱わない——可積分な優関数という柵は論文168の第5節がすでに書いており、本稿はそこへ立ち入らない。面積1のスパイク列も本稿の発見ではない——論文178が使った列であり、ここでは比較表の一行として引用する。論文177との関係: 177は一つの関数について $\forall$ と $\exists$ の順序を点呼し、柵をコンパクト性と特定した。本稿の対象は関数の列であり、問いは「 δ がどう ε に答えるか」ではなく極限で何が生き残るかである——柵も別で、ここでは捨ててよい集合の大きさである。加えたのはどの点でも収束しない列を20000点で数上げたこと、その部分列が概収束することを同じ点で確かめたこと、一様でなさの居場所が「滑る点」であることを遷移帯の幅で測ったこと、捨てる集合を小さくする代償を六桁にわたって測ったことである。

1. 記法と位置づけ

可測関数の列 f_n と関数 f について、四つの言い方を使う。一様収束は $\sup |f_n - f| \rightarrow 0$ 、各点収束はすべての x で $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 、 L^1 収束は $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ 、測度収束はすべての $\varepsilon > 0$ について $\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$ である。数値はすべて自前の計算である。

位置づけ: 論文177は一つの関数について「連続」の別根を点呼した。本稿の対象は関数の列であり、同じ $\forall$ と $\exists$ が並んでいても問いが違う——あちらは「 δ がどう ε に答えるか」、こちらは「極限を取ったとき何が生き残るか」である。

2. 芯: どの点でも収束しないのに、積分は消える

タイプライター列を次のように作る。 $n = 2^k + j$ ($0 \leq j < 2^k$) と書き、 f_n を区間 $[j/2^k, (j+1)/2^k)$ の定義関数とする。 k が上がるごとに幅が半分の窓が $[0, 1]$ を左から右へ掃いていく。

検算 2.1: L^1 ノルムと台の測度はどちらも 2^{-k} である。

n	ブロック k	$\ f_n\ _1 = \text{台の測度} = 2^{-k}$
1	0	1
8	3	0.125
64	6	0.015625
1024	10	0.0009765625
65536	16	$1.525878906 \times 10^{-5}$

ゆえにこの列は L^1 でも測度でも 0 に収束する。

検算 2.2： $n = 1$ から **200000** まで走らせ、 $[0, 1]$ から取った **20000** 個の点それぞれで、 $f_n(x) = 1$ になった回数と 0 になった回数を数える。

測ったもの	値
$f_n(x) = 1$ が 10 回以上あった点	20000 点 (100.00%)
$f_n(x) = 0$ が 10 回以上あった点	20000 点 (100.00%)
どの点でも 1 になった最少の回数	17
列が収束した点	0 点 (0.000000%)

観察 2.3

どの点を取っても $f_n(x)$ は 1 と 0 を無限回とる。上極限は 1 、下極限は 0 であり、一点も収束しない。それでも積分は 1.5×10^{-5} まで落ちている。「収束する」と「収束する」が、同じ列について同時に真であり同時に偽である——どちらの意味かを言わないかぎり、この文は真偽を持たない。

3. それでも部分列は概収束する

検算 3.1：各ブロックの最初だけを拾う、すなわち $n_k = 2^k$ とする。この部分列は $[0, 2^{-k})$ の定義関数である。

k	$n_k = 2^k$	20000 点のうち $f = 1$ を返す点
1	2	9933 (49.67%)
4	16	1261 (6.31%)
10	1024	22 (0.11%)
20	1048576	0 (0.0000%)

観察 3.2

測度収束は「概収束を捨てた」のではない——概収束を部分列に譲ったのである。リースの定理が言っているのはこれであり、本稿の数値はその一例を作っただけである。どの部分列でもよいわけではない——もとの列は一点も収束しないのだから、うまく選ばれた部分列だけが概収束する。

4. 一様でないのは「はしの一点」のせいではない

$[0,1]$ 上の x^n は各点で収束する ($x < 1$ で 0、 $x = 1$ で 1) が、 $\sup$ はどの n でも 1 である。よく「 $x = 1$ という一点が邪魔をしている」と言われる。それは正しくない。

検算 4.1 : $x^n = t$ となる点は $x = t^{1/n}$ である。 $t = 0.9$ と $t = 0.1$ の間を遷移帯と呼び、その幅に n を掛ける。

n	$x^n = 0.9$ となる x	$x^n = 0.1$ となる x	幅 $\times n$
10	0.989519258206	0.794328234724	1.951910235
100	0.998946949690	0.977237220956	2.170972873
1000	0.999894645035	0.997700063823	2.194581212
10000	0.999989464004	0.999769767998	2.196960058
100000	0.999998946395	0.999976974414	2.197198124

幅に n を掛けた値は $\log 9 = 2.197224577$ に収束する。

観察 4.2

グラフは平らになるのではなく、形を保ったまま右へ滑っていく。幅は $1/n$ で縮むが、その中で値は 0.9 から 0.1 まで落ちる。一様でなさが住んでいるのは $x = 1$ という点ではなく、1 へ走っていく帯である。

検算 4.3 : その帯に乗って値を測る。 $x = 1 - 1/n$ とする。

n	$x = 1 - 1/n$	x^n
10	0.9000000000000000	0.348678440100000
1000	0.9990000000000000	0.367695424770964
10^5	0.9999900000000000	0.367877601768247
10^6	0.9999990000000000	0.367879257221066

($1/e = 0.367879441171442$ 。)

観察 4.4

1 を速さ $1/n$ で追いかける点に乗ると、値はいつまでも $1/e$ のままである。各点収束は「どの点でも 0 へ行く」と言うが、それは点を固定したうえでの話であり、点を動かせば 0 に行かない。一様収束とはまさに「点を動かしても構わない」という主張である。

観察 4.5

同じ 0.3679 が論文178 にも現れるが、あちらは選んだ試験関数の値である——数が一致していることに意味は無く、別根である。

5. 捨ててよい集合を小さくすると、代償が出る

検算 5.1 : $[0, 1]$ の右端から長さ δ を捨てると、 $[0, 1 - \delta]$ の上で $\sup x^n = (1 - \delta)^n$ となり、 x^n は一様収束する。必要な n を測る。

δ	$\sup < 0.01$ に要る n	$\sup < 10^{-6}$ に要る n
0.5	7	20
0.1	44	132
0.01	459	1375
10^{-3}	4603	13809
10^{-4}	46050	138149
10^{-6}	4605168	13815504

観察 5.2

δ を 100 分の 1 にすると、必要な n は 100 倍になる。そして $\delta = 0$ にすると、どんな n でも足りない—— $[0, 1]$ 全体では $\sup$ は永久に 1 である。エゴロフの定理が保証しているのは「任意の $\delta > 0$ について可能」であって、「 $\delta = 0$ でも可能」ではない。その二つの隙間に、この表の **4605168** が入っている。

6. 測度が有限でなければ、一つの含意が落ちる

検算 6.1：実数直線の上で f_n を $[n, n + 1]$ の定義関数とする。

n	固定した x での値	積分	$\{f_n > 1/2\}$ の測度
1	$n > x$ になれば 0	1	1
100	同上	1	1
1000	同上	1	1

観察 6.2

この列はすべての点で 0 に収束するのに、 L^1 でも測度でも収束しない。有限測度の空間ではこれは起こりえない——そこでは概収束は測度収束を含意する（エゴロフ）。ゆえに含意の表は空間によって変わる——柵は測度が有限であることである。

7. 分離子：何を捨てることを許すか

検算 7.1（含意の表）：四つの例で、四つの意味の真偽を並べる。

列	各点	一様	L^1	測度
$[0, 1]$ 上の x^n	はい	いいえ	はい	はい
$[0, 1/n]$ 上の n （論文178）	はい	いいえ	いいえ	はい
タイプライター	いいえ	いいえ	はい	はい
実数直線上の $[n, n + 1]$	はい	いいえ	いいえ	いいえ

どの列も、どれかの意味で収束し、どれかの意味で収束しない。そして各点収束の列に「いいえ」が入り、 L^1 の列にも「いいえ」が入る——どちらの向きの含意も無い。

観察 7.2（分離子）

四つを、何を捨てることを許すかで並べる。

呼び名	何を捨てることを許すか
一様収束	何も捨てない
概一様収束（エゴロフ）	測度 δ の集合（ δ は好きなだけ小さく）
概収束	測度 0 の集合
測度収束	部分列以外のすべて（リース）
L^1 収束	各点の情報を丸ごと

観察 7.3

強さの順に見えるものは、実は「捨てる許可」の順である。そして許可を一段ゆるめるたびに、通る列が増える——タイプライターは各点の情報を丸ごと捨てて初めて通り、 $[n, n + 1]$ の箱は何を捨てても L^1 を通らない。

8. 点呼と結び

本稿が確かめたことを並べる。

1. どの点でも収束しないのに積分は消える（検算2.2）：**20000** 点中収束した点は **0** 個、 L^1 ノルムは 1.5×10^{-5} 。
2. 部分列は概収束する（検算3.1）： $k = 20$ で **1** を返す点は **0** 個。
3. 一様でなさは「滑る帯」に住む（検算4.1）：幅 $\times n$ が $\log 9 = 2.197225$ へ。
4. 滑る点に乗ると値は $1/e$ のまま（検算4.3）： $n = 10^6$ で **0.367879257**。
5. 捨てる集合を小さくする代償（検算5.1）： $\delta = 10^{-6}$ で $n = 4605168$ 。
6. 測度が無限なら含意が一つ落ちる（検算6.1）。
7. 分離子は「何を捨てることを許すか」（観察7.2）。

結び：「 f_n は f に収束する」という文は、それだけでは真偽を持たない。タイプライター列はこの文について、 L^1 では真、測度では真、各点では一点も真でない。四つの意味は強さの階段に見えるが、階段を作っているのは関数のほうではなくこちらが何を捨てる気であるかである——何も捨てないと決めれば一様収束、零集合を捨てる気があれば概収束、部分列だけ残せばよいと決めれば測度収束。列は最初から最後まで同じ列であり、動いているのは許可のほうである。

参考文献

1. Egorov, D. F. (1911). *Sur les suites des fonctions mesurables*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 152.
2. Riesz, F. (1909). *Sur les suites de fonctions mesurables*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 148.
3. Lebesgue, H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars.
4. Royden, H. L. (1988). *Real Analysis*. Third edition. New York: Macmillan.
5. Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. Third edition. New York: McGraw-Hill.
6. 山岸勇輝 (2026). 順序を書かない極限は、量ではない [論文154]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084647
7. 山岸勇輝 (2026). ルベグが買ったのは、クラスの大きさではなく、極限で閉じることである [論文168]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093320
8. 山岸勇輝 (2026). 量子子の順序が、中身のすべてである [論文177]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098103
9. 山岸勇輝 (2026). デルタは関数ではなく、写像である [論文178]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098261
10. 山岸勇輝 (2026). 四つの平均は一つの族であり、等号の柵は一つしかない [論文194]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106809
11. 山岸勇輝 (2026). 「安定」は六つの別の言葉であり、分けているのは何を揺らすかである [論文195]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107170

12. 山岸勇輝 (2026). 「圧力」は四つの別の量であり、単位が同じことは何も保証しない [論文196]. Zenodo.
10.5281/zenodo.22107518

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)