

El teorema de cancelación de masa 4π

— La emergencia del ángulo sólido puro en campos de cuadrado inverso y la estructura matemática del equilibrio sin fricción (Zero-Tension) — [Artículo 02]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japón

Septiembre de 2026 (Segunda edición)

— *From thinking to syncing.* —

Resumen

En el espacio euclídeo tridimensional, al integrar sobre una bola cuya densidad sigue la ley del inverso del cuadrado $\rho(r) = 1/r^2$, el jacobiano r^2 del elemento de volumen y la densidad $1/r^2$ se cancelan. Como resultado, la masa total dentro de la bola unidad **coincide con el ángulo sólido total del espacio tridimensional, 4π** (la medida completa en estereorradianes). Formulamos esto como el «teorema de cancelación de masa 4π » (Teorema 1).

Extendiendo la misma integral a un exponente general n se obtiene $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, y $n = 2$ es **el único exponente que hace coincidir la masa con el propio ángulo sólido** (Sección 5). Escribiendo $m = 4\pi \cdot S$ y leyendo $S = \frac{1}{3-n}$ como el «número de hojas superpuestas de 4π », aparece una escalera de módulos que recorre 2π , 4π , 8π , y se muestra que 16π (apilamiento) y $16\pi^2$ (producto) pertenecen a reglas de generación distintas.

Alcance (scope note): El teorema de este artículo es una integral múltiple elemental, y enuncia desde el lado de la integral el mismo hecho que el Teorema 1 del Artículo 01 (dm/dr es independiente de r solo para $n = 2$). El 4π que aparece aquí es la propia integral angular $\int_{S^2} d\Omega$, el mismo ángulo sólido que el 4π de la ley de Gauss, la ley de Coulomb y la ecuación de Poisson (ese carácter compartido se trata en el Artículo 13). Para tratar $\rho = r^{-2}$ como densidad hay que escribir $\rho = k/r^2$ con una constante k de dimensión $[M/L]$; $m = 4\pi$ es su valor bajo la elección de unidades $k = 1$ y radio 1 . Zero-Tension es el nombre que el corpus da a este estado, en el que el crecimiento del área y la caída de la densidad se equilibran exactamente; no define ninguna magnitud que corresponda a una fricción o a una tensión. La coincidencia con la obra de Carr en la Sección 4 es una observación sobre el linaje del cálculo. No se afirma ninguna ley física nueva. **Lo que este artículo añade** es que, al extender la misma integral a un n general, obtiene $m(n) = 4\pi/(3-n)$ y muestra que $n = 2$ es el único exponente que hace coincidir la masa con el propio ángulo sólido; y que, leyendo $S = 1/(3-n)$ como «el número de hojas superpuestas de 4π », separa 16π (apilamiento) y $16\pi^2$ (producto) como reglas de generación distintas.

1. Introducción: del valor numérico a la cancelación estructural

En física y en geometría el valor 4π aparece por todas partes — en el área de la esfera $S = 4\pi r^2$, en la ley de Gauss $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$ y en otros lugares — y dentro de las fórmulas suele tratarse simplemente como una constante. En un campo tridimensional del inverso del cuadrado $\rho(r) = 1/r^2$, sin embargo, 4π aparece como el propio ángulo sólido puro, puesto al descubierto una vez que la expansión espacial y la atenuación se han cancelado.

2. El teorema de cancelación de masa 4π

Definición 1 (Elemento de volumen esférico)

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$), el elemento de volumen derivado del determinante jacobiano es $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Teorema 1 (El teorema de cancelación de masa 4π)

Para una bola unidad tridimensional $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ que contiene un campo de densidad $\rho(r) = r^{-2}$, la masa total m ve cancelada toda dependencia radial y es igual al ángulo sólido puro 4π .

Demostración.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot (r^2 \sin \theta) dr$$

Aquí se cancelan el $1/r^2$ de la densidad y el r^2 del jacobiano:

$$r^2 \cdot \frac{1}{r^2} = 1$$

Las variables se separan de forma independiente, y la integral se convierte en un producto de tres integrales simples:

$$m = \left(\int_0^1 1 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

3. Interpretación geométrica: invariancia de escala

La cancelación $r^2 \cdot (1/r^2) = 1$ significa que **la escala de distancia r desaparece** del integrando. Es decir, $\rho = r^{-2}$ es una **distribución invariante de escala** en la que el crecimiento del área esférica y la atenuación de la densidad se equilibran exactamente.

Es el mismo hecho que el Teorema 1 del Artículo 01 ($dm/dr = 4\pi$ independiente de r), visto desde el lado de la integral. El corpus llama a este estado de equilibrio Zero-Tension.

4. Conexión con la teoría de la integración múltiple de G. S. Carr

La estructura de integración múltiple utilizada en este teorema tiene la misma forma que las integrales múltiples en coordenadas esféricas recopiladas en *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics* (1886) de G. S. Carr. La obra de Carr es conocida como el libro con el que Ramanujan estudió por su cuenta.

5. El valor para un n general: la escalera de módulos

Realizando el cálculo de este artículo para un exponente general n se obtiene

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

Escribiendo $m = 4\pi \cdot S$ se obtiene $S = \frac{1}{3-n}$; leyendo S como el **número de hojas superpuestas de 4π** se obtiene la escalera siguiente.

n	$S = \frac{1}{3-n}$	m	Lectura
0	1/3	$4\pi/3$	Volumen de la bola unidad
1	1/2	2π	Mitad de 4π
2	1	4π	Una hoja de 4π
5/2	2	8π	Dos hojas de 4π
11/4	4	16π	Cuatro hojas de 4π

$n = 2$ es el único exponente en el que m coincide con el propio ángulo sólido ($S = 1$). Los valores 2π , 4π , 8π concuerdan con las constantes que el Artículo 13 trata como módulos.

$16\pi^2$ no está en esta escalera. Expresado en hojas, $S = 16\pi^2/4\pi = 4\pi$, de modo que **el propio número de hojas contiene π . $16\pi = 4\pi \times 4$ (apilamiento) y $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ (producto) siguen reglas de generación distintas.**

6. Conclusión

Este artículo ha mostrado lo siguiente.

1. En la bola unidad con densidad del inverso del cuadrado $\rho = r^{-2}$, el r^2 del jacobiano y el $1/r^2$ de la densidad se cancelan, y la masa total **coincide con el ángulo sólido total 4π .**
 2. En general $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, y **$n = 2$ es el único exponente** en el que m coincide con el propio ángulo sólido.
- Lo que hace especial a **$n = 2$** es que es **el único exponente que hace la integral radial exactamente igual a 1**; a la masa no le queda entonces más que la integral angular **4π** . El equilibrio entre expansión y atenuación deja al descubierto el ángulo sólido.

Registro de revisiones

Segunda edición (septiembre de 2026): La forma se ajustó a la plantilla actual. Las observaciones sobre la ubicación, las unidades, el término Zero-Tension y Carr, antes repartidas entre el resumen y la conclusión, se reunieron en la nota de alcance justo después del resumen. Se añadieron DOI a las referencias del corpus y se eliminó la entrada en la que el artículo se citaba a sí mismo. Se corrigieron las editoriales de Carr (1886) y Kanigel (1991) en las referencias para que correspondan a las ediciones citadas.

Referencias

1. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.

2. Kanigel, R. (1991). *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*. Charles Scribner's Sons.

3. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Artículo 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186

4. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Artículo 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)