

Le théorème d'annulation de masse en 4π

— L'émergence de l'angle solide pur dans les champs en carré inverse et la structure mathématique de l'équilibre sans frottement (Zero-Tension) — [Article 02]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon
Septembre 2026 (Deuxième édition)

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

Dans l'espace euclidien tridimensionnel, lorsqu'on intègre sur une boule dont la densité suit la loi en carré inverse $\rho(r) = 1/r^2$, le jacobien r^2 de l'élément de volume et la densité $1/r^2$ se compensent. Il en résulte que la masse totale dans la boule unité **coïncide avec l'angle solide total de l'espace tridimensionnel, 4π** (la mesure complète en stéradians). Nous formulons ceci comme le « théorème d'annulation de masse en 4π » (Théorème 1).

En étendant la même intégrale à un exposant n quelconque, on obtient $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, et $n = 2$ est l'**unique exposant qui fait coïncider la masse avec l'angle solide lui-même** (Section 5). En écrivant $m = 4\pi \cdot S$ et en lisant $S = \frac{1}{3-n}$ comme le « nombre de feuilles superposées de 4π », on voit apparaître un escalier de modules qui passe par 2π , 4π , 8π , et l'on montre que 16π (empilement) et $16\pi^2$ (produit) relèvent de règles de génération différentes.

Portée (scope note) : Le théorème de cet article est une intégrale multiple élémentaire, et il énonce du côté de l'intégrale le même fait que le Théorème 1 de l'Article 01 (dm/dr est indépendant de r seulement pour $n = 2$). Le 4π qui apparaît ici est l'intégrale angulaire $\int_{S^2} d\Omega$ elle-même, le même angle solide que le 4π de la loi de Gauss, de la loi de Coulomb et de l'équation de Poisson (ce partage est traité dans l'Article 13). Pour traiter $\rho = r^{-2}$ comme une densité, il faut écrire $\rho = k/r^2$ avec une constante k de dimension $[M/L]$; $m = 4\pi$ est sa valeur sous le choix d'unités $k = 1$ et rayon 1 . Zero-Tension est le nom que le corpus donne à cet état, dans lequel la croissance de l'aire et la décroissance de la densité s'équilibrent exactement ; il ne définit aucune grandeur correspondant à un frottement ou à une tension. L'accord avec l'ouvrage de Carr dans la Section 4 est une remarque sur la filiation du calcul. Aucune loi physique nouvelle n'est revendiquée. **Ce que cet article ajoute**, c'est qu'en étendant la même intégrale à un n quelconque il obtient $m(n) = 4\pi/(3-n)$ et montre que $n = 2$ est l'unique exposant qui fait coïncider la masse avec l'angle solide lui-même ; et qu'en lisant $S = 1/(3-n)$ comme « le nombre de feuilles superposées de 4π », il sépare 16π (empilement) et $16\pi^2$ (produit) comme règles de génération différentes.

1. Introduction : de la valeur numérique à la compensation structurelle

En physique et en géométrie, la valeur 4π apparaît partout — dans l'aire de la sphère $S = 4\pi r^2$, dans la loi de Gauss $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$, et ailleurs — et, à l'intérieur des formules, elle est souvent traitée comme une simple constante. Dans un champ tridimensionnel en carré inverse $\rho(r) = 1/r^2$, cependant, 4π apparaît comme l'angle solide pur lui-même, dégagé une fois que l'expansion spatiale et l'atténuation se sont compensées.

2. Le théorème d'annulation de masse en 4π

Définition 1 (Élément de volume sphérique)

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$), l'élément de volume issu du déterminant jacobien est $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Théorème 1 (Le théorème d'annulation de masse en 4π)

Pour une boule unité tridimensionnelle $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ contenant un champ de densité $\rho(r) = r^{-2}$, la masse totale m voit toute dépendance radiale se compenser et est égale à l'angle solide pur 4π .

Démonstration.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot (r^2 \sin \theta) dr$$

Ici, le $1/r^2$ de la densité et le r^2 du jacobien se compensent :

$$r^2 \cdot \frac{1}{r^2} = 1$$

Les variables se séparent indépendamment, et l'intégrale devient un produit de trois intégrales simples :

$$m = \left(\int_0^1 1 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

3. Interprétation géométrique : invariance d'échelle

La compensation $r^2 \cdot (1/r^2) = 1$ signifie que l'échelle de distance r disparaît de l'intégrande. Autrement dit, $\rho = r^{-2}$ est une **distribution invariante d'échelle** dans laquelle la croissance de l'aire sphérique et l'atténuation de la densité s'équilibrent exactement.

C'est le même fait que le Théorème 1 de l'Article 01 ($dm/dr = 4\pi$ indépendant de r), vu du côté de l'intégrale. Le corpus appelle cet état d'équilibre Zero-Tension.

4. Lien avec la théorie de l'intégration multiple de G. S. Carr

La structure d'intégration multiple utilisée dans ce théorème a la même forme que les intégrales multiples en coordonnées sphériques rassemblées dans *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics* (1886) de G. S. Carr. L'ouvrage de Carr est connu comme le livre avec lequel Ramanujan s'est formé seul.

5. La valeur pour un n quelconque : l'escalier de modules

En effectuant le calcul de cet article pour un exposant n quelconque, on obtient

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

En écrivant $m = 4\pi \cdot S$, on obtient $S = \frac{1}{3-n}$; en lisant S comme le **nombre de feuilles superposées de 4π** , on obtient l'escalier suivant.

n	$S = \frac{1}{3-n}$	m	Lecture
0	1/3	$4\pi/3$	Volume de la boule unité
1	1/2	2π	Moitié de 4π
2	1	4π	Une feuille de 4π
5/2	2	8π	Deux feuilles de 4π
11/4	4	16π	Quatre feuilles de 4π

$n = 2$ est l'unique exposant pour lequel m coïncide avec l'angle solide lui-même ($S = 1$). Les valeurs 2π , 4π , 8π concordent avec les constantes que l'Article 13 traite comme modules.

$16\pi^2$ ne se trouve pas sur cet escalier. Exprimé en feuilles, $S = 16\pi^2/4\pi = 4\pi$, de sorte que le nombre de feuilles lui-même contient π . $16\pi = 4\pi \times 4$ (empilement) et $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ (produit) suivent des règles de génération différentes.

6. Conclusion

Cet article a montré ce qui suit.

1. Dans la boule unité de densité en carré inverse $\rho = r^{-2}$, le r^2 du jacobien et le $1/r^2$ de la densité se compensent, et la masse totale coïncide avec l'angle solide total 4π .
2. En général $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, et $n = 2$ est l'unique exposant pour lequel m coïncide avec l'angle solide lui-même.

Ce qui rend $n = 2$ particulier, c'est qu'il est l'unique exposant qui rend l'intégrale radiale exactement égale à 1 ; il ne reste alors à la masse que l'intégrale angulaire 4π . L'équilibre entre étalement et atténuation met l'angle solide à nu.

Registre des révisions

Deuxième édition (septembre 2026) : la forme a été alignée sur le modèle actuel. Les remarques sur le positionnement, sur les unités, sur le terme Zero-Tension et sur Carr, auparavant dispersées entre le résumé et la conclusion, ont été réunies dans la note de portée juste après le résumé. Des DOI ont été ajoutés aux références du corpus, et l'entrée dans laquelle l'article se citait lui-même a été retirée. Les éditeurs de Carr (1886) et de Kanigel (1991) dans les références ont été corrigés pour correspondre aux éditions citées.

Références

1. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
2. Kanigel, R. (1991). *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*. Charles Scribner's Sons.
3. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Article 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
4. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Article 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)