

4 π 질량 상쇄 정리

— 역제곱 장에서 순수 입체각의 출현과 무마찰 평형(Zero-Tension)의 수학적 구조 — [논문 02]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, 일본
2026년 9월 (제2판)

— From thinking to syncing. —

초록

3차원 유클리드 공간에서 밀도가 역제곱 법칙 $\rho(r) = 1/r^2$ 을 따르는 공 위에서 적분하면, 부피 요소의 야코비안 r^2 과 밀도 $1/r^2$ 이 상쇄된다. 그 결과 단위 공 안의 총질량은 3차원 공간의 총 입체각 4π 와 일치한다(스테라디안으로 켄 전체 측도). 이를 “4 π 질량 상쇄 정리”로 정식화한다(정리 1).

같은 적분을 일반적인 지수 n 으로 넓히면 $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ 을 얻으며, $n = 2$ 는 질량을 입체각 자체와 일치시키는 유일한 지수이다(제5절). $m = 4\pi \cdot S$ 로 쓰고 $S = \frac{1}{3-n}$ 을 “4 π 가 곱친 장수”로 읽으면, 2π , 4π , 8π 를 지나는 모듈 계단이 드러나고, 16π (쌓기)와 $16\pi^2$ (곱)이 서로 다른 생성 규칙에 속함이 보인다.

본 논문의 범위(scope note): 본 논문의 정리는 초등적인 다중 적분이며, 논문 01의 정리 1(dm/dr 이 r 에 무관한 것은 $n = 2$ 일 때뿐)과 같은 사실을 적분 쪽에서 진술한 것이다. 여기에 나타나는 4π 는 각 적분 $\int_{S^2} d\Omega$ 그 자체로, 가우스 법칙·쿨롱 법칙·푸아송 방정식의 4π 와 같은 입체각이다(그 공유는 논문 13에서 다룬다). $\rho = r^{-2}$ 를 밀도로 다루려면 $\rho = k/r^2$ 로 써야 하며, 여기서 상수 k 의 차원은 $[M/L]$ 이다. $m = 4\pi$ 는 단위 선택 $k = 1$ 과 반지름 1 아래에서의 값이다. Zero-Tension은 면적의 증가와 밀도의 감소가 정확히 균형을 이루는 이 상태를 체계가 부르는 이름이며, 마찰이나 장력에 해당하는 양을 정의하지는 않는다. 제4절에서 Carr의 저작과 일치한다는 것은 계산의 계보에 관한 언급이다. 새로운 물리 법칙은 주장하지 않는다. **본 논문이 더하는 것은**, 같은 적분을 일반적인 n 으로 넓혀 $m(n) = 4\pi/(3-n)$ 을 얻고 $n = 2$ 가 질량을 입체각 자체와 일치시키는 유일한 지수임을 보인다는 것, 그리고 $S = 1/(3-n)$ 을 “4 π 가 곱친 장수”로 읽어 16π (쌓기)와 $16\pi^2$ (곱)을 서로 다른 생성 규칙으로 가르든다는 것이다.

1. 서론: 수치에서 구조적 상쇄로

물리학과 기하학에서 4π 라는 값은 어디에나 나타나며 — 구의 겉넓이 $S = 4\pi r^2$, 가우스 법칙 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$ 등 — 식 안에서는 흔히 단순한 상수로 다루어진다. 그러나 3차원 역제곱 장 $\rho(r) = 1/r^2$ 에서 4π 는 공간의 팽창과 감쇠가 상쇄된 뒤에 끌어내어진, 순수한 입체각 그 자체로 나타난다.

2. 4π 질량 상쇄 정리

정의 1 (구면 부피 요소)

구면 좌표 (r, θ, φ) ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$)에서 야코비 행렬식으로부터 유도되는 부피 요소는 $dV = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$ 이다.

정리 1 (4π 질량 상쇄 정리)

3차원 단위 공 $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ 가 밀도장 $\rho(r) = r^{-2}$ 를 담고 있을 때, 총질량 m 은 모든 반지름 의존성이 상쇄되어 순수한 입체각 4π 와 같다.

증명.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot (r^2 \sin \theta) \, dr$$

여기서 밀도의 $1/r^2$ 과 야코비안의 r^2 이 상쇄된다:

$$r^2 \cdot \frac{1}{r^2} = 1$$

변수들이 독립적으로 분리되어, 적분은 세 단일 적분의 곱이 된다:

$$m = \left(\int_0^1 1 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

3. 기하학적 해석: 척도 불변성

상쇄 $r^2 \cdot (1/r^2) = 1$ 은 거리 척도 r 이 피적분 함수에서 빠진다는 뜻이다. 즉 $\rho = r^{-2}$ 는 구면적의 증가와 밀도의 감소가 정확히 균형을 이루는 척도 불변 분포이다.

이는 논문 01의 정리 1($dm/dr = 4\pi$ 가 r 에 무관함)과 같은 사실을 적분 쪽에서 본 것이다. 체계는 이 균형 상태를 Zero-Tension이라 부른다.

4. G. S. Carr의 다중 적분 이론과의 연결

이 정리에서 쓰는 다중 적분 구조는 G. S. Carr의 *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*(1886)에 수록된 구면 좌표 다중 적분과 같은 형태이다. Carr의 이 책은 라마누잔이 독학에 쓴 책으로 알려져 있다.

5. 일반적인 n 에서의 값: 모듈 계단

이 논문의 계산을 일반적인 지수 n 에 대해 수행하면 다음을 얻는다.

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

$m = 4\pi \cdot S$ 로 쓰면 $S = \frac{1}{3-n}$ 이며, S 를 4π 가 곱친 장수로 읽으면 다음의 계단을 얻는다.

n	$S = \frac{1}{3-n}$	m	읽기
0	1/3	$4\pi/3$	단위 공의 부피
1	1/2	2π	4π 의 절반
2	1	4π	4π 한 장
5/2	2	8π	4π 두 장
11/4	4	16π	4π 네 장

$n = 2$ 는 m 이 입체각 자체와 일치하는 유일한 지수이다($S = 1$). 2π , 4π , 8π 라는 값은 논문 13이 모듈로 다루는 상수들과 일치한다.

$16\pi^2$ 는 이 계단 위에 없다. 장수로 나타내면 $S = 16\pi^2/4\pi = 4\pi$ 이므로, 장수 자체가 π 를 포함한다. $16\pi = 4\pi \times 4$ (쌓기)와 $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ (곱)는 서로 다른 생성 규칙을 따른다.

6. 결론

본 논문은 다음을 보였다.

- 역제곱 밀도 $\rho = r^{-2}$ 인 단위 공에서 야코비안의 r^2 과 밀도의 $1/r^2$ 이 상쇄되어, 총질량이 총 입체각 4π 와 일치한다.
- 일반적으로 $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ 이며, $n = 2$ 는 m 이 입체각 자체와 일치하는 유일한 지수이다.

$n = 2$ 를 특별하게 만드는 것은 그것이 반지름 방향 적분을 정확히 1로 만드는 유일한 지수라는 점이다. 그러면 질량에는 각 적분 4π 밖에 남지 않는다. 퍼짐과 감쇠의 균형이 입체각을 드러낸다.

개정 기록

제2판(2026년 9월): 서식을 현행 템플릿에 맞추었다. 요약과 결론에 흩어져 있던 위치 매김, 단위, Zero-Tension이라는 용어, Carr에 관한 언급을 요약 바로 뒤의 범위 주기에 모았다. 체계 내 참고문헌에 DOI를 덧붙이고, 논문이 자기 자신을 인용하던 항목을 삭제했다. 참고문헌의 Carr(1886)와 Kanigel(1991)의 출판사를 인용한 판의 것으로 바로잡았다.

참고문헌

1. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
2. Kanigel, R. (1991). *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*. Charles Scribner's Sons.
3. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [논문 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
4. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [논문 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917