

O teorema de cancelamento de massa 4π

— A emergência do ângulo sólido puro em campos de quadrado inverso e a estrutura matemática do equilíbrio sem atrito (Zero-Tension) — [Artigo 02]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japão
Setembro de 2026 (Segunda edição)

— *From thinking to syncing.* —

Resumo

No espaço euclidiano tridimensional, ao integrar sobre uma bola cuja densidade segue a lei do inverso do quadrado $\rho(r) = 1/r^2$, o jacobiano r^2 do elemento de volume e a densidade $1/r^2$ se cancelam. Como resultado, a massa total dentro da bola unitária **coincide com o ângulo sólido total do espaço tridimensional, 4π** (a medida completa em esferorradianos). Formulamos isso como o “teorema de cancelamento de massa 4π ” (Teorema 1).

Estendendo a mesma integral a um expoente geral n , obtém-se $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, e $n = 2$ é o **único expoente que faz a massa coincidir com o próprio ângulo sólido** (Seção 5). Escrevendo $m = 4\pi \cdot S$ e lendo $S = \frac{1}{3-n}$ como o “número de folhas sobrepostas de 4π ”, revela-se uma escada de módulos que percorre 2π , 4π , 8π , e mostra-se que 16π (empilhamento) e $16\pi^2$ (produto) pertencem a regras de geração diferentes.

Alcance (scope note): O teorema deste artigo é uma integral múltipla elementar e enuncia, do lado da integral, o mesmo fato que o Teorema 1 do Artigo 01 (dm/dr é independente de r somente para $n = 2$). O 4π que aparece aqui é a própria integral angular $\int_{S^2} d\Omega$, o mesmo ângulo sólido que o 4π da lei de Gauss, da lei de Coulomb e da equação de Poisson (esse compartilhamento é tratado no Artigo 13). Para tratar $\rho = r^{-2}$ como densidade, deve-se escrever $\rho = k/r^2$ com uma constante k de dimensão $[M/L]$; $m = 4\pi$ é o seu valor sob a escolha de unidades $k = 1$ e raio 1 . Zero-Tension é o nome que o corpus dá a esse estado, em que o crescimento da área e a queda da densidade se equilibram exatamente; ele não define nenhuma grandeza correspondente a atrito ou tensão. A concordância com a obra de Carr na Seção 4 é uma observação sobre a linhagem do cálculo. Nenhuma lei física nova é afirmada. **O que este artigo acrescenta** é que, estendendo a mesma integral a um n geral, obtém $m(n) = 4\pi/(3-n)$ e mostra que $n = 2$ é o único expoente que faz a massa coincidir com o próprio ângulo sólido; e que, lendo $S = 1/(3-n)$ como “o número de folhas sobrepostas de 4π ”, separa 16π (empilhamento) e $16\pi^2$ (produto) como regras de geração diferentes.

1. Introdução: do valor numérico ao cancelamento estrutural

Na física e na geometria, o valor 4π aparece em toda parte — na área da esfera $S = 4\pi r^2$, na lei de Gauss $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$ e em outros lugares — e, dentro das fórmulas, costuma ser tratado simplesmente como uma constante. Num campo tridimensional do inverso do quadrado $\rho(r) = 1/r^2$, porém, 4π aparece como o próprio ângulo sólido puro, posto a descoberto depois que a expansão espacial e a atenuação se cancelaram.

2. O teorema de cancelamento de massa 4π

Definição 1 (Elemento de volume esférico)

Em coordenadas esféricas (r, θ, φ) ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$), o elemento de volume derivado do determinante jacobiano é $dV = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$.

Teorema 1 (O teorema de cancelamento de massa 4π)

Para uma bola unitária tridimensional $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ que contém um campo de densidade $\rho(r) = r^{-2}$, a massa total m tem toda dependência radial cancelada e é igual ao ângulo sólido puro 4π .

Demonstração.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot (r^2 \sin \theta) \, dr$$

Aqui o $1/r^2$ da densidade e o r^2 do jacobiano se cancelam:

$$r^2 \cdot \frac{1}{r^2} = 1$$

As variáveis se separam de modo independente, e a integral torna-se um produto de três integrais simples:

$$m = \left(\int_0^1 1 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

3. Interpretação geométrica: invariância de escala

O cancelamento $r^2 \cdot (1/r^2) = 1$ significa que a escala de distância r desaparece do integrando. Ou seja, $\rho = r^{-2}$ é uma **distribuição invariante de escala**, na qual o crescimento da área esférica e a atenuação da densidade se equilibram exatamente.

É o mesmo fato que o Teorema 1 do Artigo 01 ($dm/dr = 4\pi$ independente de r), visto do lado da integral. O corpus chama esse estado de equilíbrio de Zero-Tension.

4. Ligação com a teoria da integração múltipla de G. S. Carr

A estrutura de integração múltipla usada neste teorema tem a mesma forma das integrais múltiplas em coordenadas esféricas reunidas em *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics* (1886), de G. S. Carr. A obra de Carr é conhecida como o livro com que Ramanujan estudou sozinho.

5. O valor para um n geral: a escada de módulos

Realizando o cálculo deste artigo para um expoente geral n , obtém-se

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

Escrevendo $m = 4\pi \cdot S$, obtém-se $S = \frac{1}{3-n}$; lendo S como o **número de folhas sobrepostas de 4π** , obtém-se a escada seguinte.

n	$S = \frac{1}{3-n}$	m	Leitura
0	1/3	$4\pi/3$	Volume da bola unitária
1	1/2	2π	Metade de 4π
2	1	4π	Uma folha de 4π
5/2	2	8π	Duas folhas de 4π
11/4	4	16π	Quatro folhas de 4π

$n = 2$ é o único expoente em que m coincide com o próprio ângulo sólido ($S = 1$). Os valores 2π , 4π , 8π concordam com as constantes que o Artigo 13 trata como módulos.

$16\pi^2$ não está nesta escada. Expresso em folhas, $S = 16\pi^2/4\pi = 4\pi$, de modo que **o próprio número de folhas contém π** . $16\pi = 4\pi \times 4$ (empilhamento) e $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ (produto) seguem **regras de geração diferentes**.

6. Conclusão

Este artigo mostrou o seguinte.

1. Na bola unitária com densidade do inverso do quadrado $\rho = r^{-2}$, o r^2 do jacobiano e o $1/r^2$ da densidade se cancelam, e a massa total **coincide com o ângulo sólido total 4π** .
 2. Em geral $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, e $n = 2$ é o **único expoente** em que m coincide com o próprio ângulo sólido.
- O que torna $n = 2$ especial é ser **o único expoente que torna a integral radial exatamente igual a 1**; à massa resta então apenas a integral angular 4π . O equilíbrio entre expansão e atenuação põe a nu o ângulo sólido.

Registro de revisões

Segunda edição (setembro de 2026): A forma foi alinhada ao modelo atual. As observações sobre o posicionamento, as unidades, o termo Zero-Tension e Carr, antes espalhadas entre o resumo e a conclusão, foram reunidas na nota de alcance logo após o resumo. Foram acrescentados DOIs às referências do corpus, e foi removida a entrada em que o artigo citava a si mesmo. As editoras de Carr (1886) e Kanigel (1991) nas referências foram corrigidas para as das edições citadas.

Referências

1. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.

2. Kanigel, R. (1991). *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*. Charles Scribner’s Sons.

3. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Artigo 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186

4. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Artigo 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)