

4 π 质量抵消定理

——平方反比场中纯立体角的显现与无摩擦平衡（Zero-Tension）的数学结构——[论文02]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, 日本

2026 年 9 月（第二版）

— From thinking to syncing. —

摘要

在三维欧几里得空间中，对密度服从平方反比定律 $\rho(r) = 1/r^2$ 的球进行积分时，体积元的雅可比因子 r^2 与密度 $1/r^2$ 相互抵消。结果，单位球内的总质量与三维空间的总立体角 4π 一致（以球面度计的全测度）。我们把这一点表述为“4 π 质量抵消定理”（定理 1）。

把同一积分推广到一般指数 n ，得到 $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ ，而 $n = 2$ 是使质量与立体角本身一致的唯一指数（第 5 节）。写成 $m = 4\pi \cdot S$ ，并把 $S = \frac{1}{3-n}$ 读作“4 π 重叠的张数”，便会出现一条经过 $2\pi, 4\pi, 8\pi$ 的模块阶梯，并表明 16π （叠放）与 $16\pi^2$ （乘积）属于不同的生成规则。

本文的射程（scope note）：本文的定理是一个初等的多重积分，它从积分一侧陈述了与论文01 定理 1 相同的事实（ dm/dr 与 r 无关，仅当 $n = 2$ ）。这里出现的 4π 就是角积分 $\int_{S^2} d\Omega$ 本身，与高斯定律、库仑定律和泊松方程中的 4π 是同一个立体角（这种共有在论文13 中讨论）。若要把 $\rho = r^{-2}$ 当作密度来处理，应写成 $\rho = k/r^2$ ，其中常数 k 的量纲为 $[M/L]$ ； $m = 4\pi$ 是在单位选择 $k = 1$ 、半径 1 之下的值。Zero-Tension 是本体系统对这种状态的称呼——面积的增长与密度的下降恰好平衡；它并不定义任何对应于摩擦或张力的量。第 4 节与 Carr 著作的一致，是关于这一计算之渊源的附注。本文不主张任何新的物理定律。本文所增添的是：把同一积分推广到一般的 n ，得到 $m(n) = 4\pi/(3-n)$ ，并表明 $n = 2$ 是使质量与立体角本身一致的唯一指数；以及把 $S = 1/(3-n)$ 读作“4 π 重叠的张数”，从而把 16π （叠放）与 $16\pi^2$ （乘积）作为不同的生成规则区分开来。

1. 引言：从数值到结构性抵消

在物理与几何中， 4π 这个值随处可见——球面积 $S = 4\pi r^2$ 、高斯定律 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$ 等等——在公式里它常常只被当作一个常数处理。然而，在三维平方反比场 $\rho(r) = 1/r^2$ 中， 4π 是作为纯立体角本身出现的：它是在空间扩展与衰减相互抵消之后被提取出来的。

2. 4π 质量抵消定理

定义 1 (球坐标体积元)

在球坐标 (r, θ, φ) ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$) 中, 由雅可比行列式导出的体积元为 $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ 。

定理 1 (4π 质量抵消定理)

对于三维单位球 $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$, 若其中含有密度场 $\rho(r) = r^{-2}$, 则总质量 m 的一切径向依赖都被抵消, 等于纯立体角 4π 。

证明

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot (r^2 \sin \theta) dr$$

这里密度的 $1/r^2$ 与雅可比因子的 r^2 相互抵消:

$$r^2 \cdot \frac{1}{r^2} = 1$$

各变量独立分离, 积分成为三个单重积分之积:

$$m = \left(\int_0^1 1 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

3. 几何解释: 尺度不变性

抵消 $r^2 \cdot (1/r^2) = 1$ 意味着距离尺度 r 从被积函数中消失。也就是说, $\rho = r^{-2}$ 是一个尺度不变的分布, 其中球面积的增长与密度的衰减恰好平衡。

这与论文01的定理 1 ($dm/dr = 4\pi$ 与 r 无关) 是同一事实, 只是从积分一侧来看。本体系把这种平衡状态称为 Zero-Tension。

4. 与 G. S. Carr 多重积分理论的联系

本定理所用的多重积分结构，与 G. S. Carr 所编 *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*（1886）中收录的球坐标多重积分具有相同的形式。Carr 的这部著作以拉马努金自学所用之书而闻名。

5. 一般 n 的值：模块阶梯

对一般指数 n 进行本文的计算，得到

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

写成 $m = 4\pi \cdot S$ ，得 $S = \frac{1}{3-n}$ ；把 S 读作 4π 重叠的张数，便得到如下阶梯。

n	$S = \frac{1}{3-n}$	m	解读
0	1/3	$4\pi/3$	单位球的体积
1	1/2	2π	4π 的一半
2	1	4π	一张 4π
5/2	2	8π	两张 4π
11/4	4	16π	四张 4π

$n = 2$ 是 m 与立体角本身一致的唯一指数（ $S = 1$ ）。 $2\pi, 4\pi, 8\pi$ 这些值与论文13 作为模块处理的常数一致。

$16\pi^2$ 不在这条阶梯上。以张数表示， $S = 16\pi^2/4\pi = 4\pi$ ，所以张数本身含有 π 。 $16\pi = 4\pi \times 4$ （叠放）与 $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ （乘积）遵循不同的生成规则。

6. 结论

本文表明了以下几点。

- 在平方反比密度 $\rho = r^{-2}$ 的单位球中，雅可比因子的 r^2 与密度的 $1/r^2$ 相互抵消，总质量与总立体角 4π 一致。
- 一般地 $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ ，而 $n = 2$ 是 m 与立体角本身一致的唯一指数。

使 $n = 2$ 特殊的，是它是使径向积分恰好为 1 的唯一指数；此时质量只剩下角积分 4π 。扩展与衰减的平衡，使立体角裸露出来。

修订记录

第二版（2026 年 9 月）：按现行模板调整了格式。原先分散在摘要与结论中的关于定位、单位、Zero-Tension 一词以及 Carr 的说明，已汇集到紧接摘要之后的射程注记中。为本体系的参考文献补上了 DOI，并删去了本文引用自身的条目。将参考文献中 Carr（1886）与 Kanigel（1991）的出版者更正为所引版本的出版者。

参考文献

1. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
2. Kanigel, R. (1991). *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*. Charles Scribner's Sons.
3. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [论文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
4. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [论文13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917