

「完備」は四つの別の主張であり、四つを一つに束ねているのは計量が正定値であることである

— 同じ開円板がユークリッドでは不完備で双曲では完備：ローレンツでは一つが消え、一つが三つに割れ、一つは逆を向く — [論文201]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「その空間は完備である」という文は、少なくとも四つの別の主張のどれかである。本稿は、リーマンの側では四つが一つに束ねられ、符号を変えると束が解けることを数で示す。新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。第一に、リーマンの側では四つが同時に壊れる。原点を抜いた平面では、測地線が有限の長さで穴に届き、コーシー列が行き先を失い、有界閉集合がコンパクトでなくなる——三つは別々には壊れない（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。同じ集合でも、計量を替えると答が反転する。開円板の半径 r までの道は、ユークリッドでは長さ r で有界のままだが、双曲計量では $r = 0.99999999$ で **19.11382792** に達し、上限が無い（第3節）。第三に、双曲計量では測地線が決して到達しない。単位速さの半径方向の測地線は $r(s) = \tanh(s/2)$ であり、境界までの隔たりは $1 - r(s) = 2/(e^s + 1)$ で、どの s でも零にならない（第4節）。第四に、ローレンツの側では四つのうち一つがそもそも定義できない。区間は正定値でないので距離にならず、コーシー列という言い方が立たない（第5節）。第五に、もう一つは逆を向く。 $(0, 0)$ から $(2, 0)$ への時間的な道で、まっすぐな道の固有時は **2**、途中で $x = 0.3$ まで振れた道は **1.90787840283389**——測地線は最短ではなく最長である（第5節）。

本稿の射程 (scope note)：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない——ホップ＝リノウの定理、ポアンカレ円板、リンドラーくさび、時間的測地線の最大性は、いずれも標準的である。ホップ＝リノウを証明しない——本稿は定理が何を要求しているかを例で見るだけである。特異点定理を扱わない——測地線不完備が何から導かれるかは本稿の問いではない。「時間的・光的・空間的の三つが互いに独立である」ことを構成しない——分かれること自体は述べるが、分離する例は与えない。論文161 との関係：161 は「不動点」を点呼し、バナッハの定理の仮定として完備距離空間を使った——本稿はその仮定そのものを点呼する。論文198 との関係：198 は「まっすぐ」と「最短」の隔たりをリーマンの側で測った——本稿はその隔たりがローレンツの側では符号ごと反転することを書く。加えたのは四つの言い方が穴あき平面で同時に壊れることを並べたこと、同じ開円板が計量次第で完備にも不完備にもなることを長さで測ったこと、時間的な道で不等式が逆を向くことを数で出したこと、平坦なのに不完備な例が拡張可能であることを述べたことである。

1. 記法と位置づけ

「完備」には少なくとも四つの言い方がある。(a) 測地線完備 (どの測地線も径数を無限に伸ばせる)、(b) 距離完備 (コーシー列が必ず収束する)、(c) ハイネ＝ボレル (有界な閉集合がコンパクト)、(d) 最短測地線の存在 (任意の二点が長さ最小の測地線で結ばれる)。数値はすべて自前の計算であり、多倍長で 40 桁を保った。

位置づけ：論文161 は「不動点」が一つの定理ではないことを点呼し、その途中でバナッハの定理が完備距離空間を仮定することに触れた。本稿はその仮定を主題にする——そして、仮定が四つの別の顔を持っていることを見る。

2. リーマンの側では、四つが同時に壊れる

原点を抜いた平面を考える。計量はふつうのユークリッド計量である。

検算 2.1：三つの壊れ方を並べる。

言い方	この空間での様子
測地線完備	半径 r_0 から内向きに走る測地線は、長さ r_0 で穴に届く
距離完備	半径 $1/n$ の点の列はコーシーだが、行き先が取り除かれている
ハイネ＝ボレル	「半径 1 以下」は有界閉集合だが、その列に収束部分列が無い

(コーシーであることの確認：半径 $1/n$ と $1/2n$ の隔たりは $n = 10$ で 0.05、 $n = 100$ で 0.005、 $n = 1000$ で 0.0005、 $n = 10^4$ で 0.00005 である。)

観察 2.2

三つは別々に壊れたのではない。同じ一つの穴が、三つの言い方すべてを同時に落としている。ホップ＝リノウの定理が言っているのはこのことであり、連結なリーマン多様体では四つが同値になる。

3. 芯：同じ集合でも、計量を替えると答が反転する

開いた単位円板を、二つの計量で測る。集合は同じである。

検算 3.1：中心から半径 r までまっすぐ引いた道の長さを、両方で測る。ユークリッドでは r 、ポアンカレ計量では $\log \frac{1+r}{1-r}$ である。

r	ユークリッドの長さ	双曲の長さ
0.9	0.9	2.944438979
0.99	0.99	5.293304825
0.999	0.999	7.600402335
0.9999	0.9999	9.903437551
0.999999	0.999999	14.50865724
0.99999999	0.99999999	19.11382792

観察 3.2

同じ道である。ユークリッドで測れば長さは 1 を超えず、双曲で測れば上限が無い。ゆえに同じ開円板が、一方の計量では不完備であり、他方では完備である——完備性は集合の性質ではなく、計量の性質である。

観察 3.3

「境界が無いから完備」でも「境界があるから不完備」でもない。境界は同じ場所にある。変わったのはそこへ行くのにどれだけかかるかだけである。

4. 双曲計量では、測地線が決して到達しない

検算 4.1：単位速さの半径方向の測地線は $r(s) = \tanh(s/2)$ である。境界までの隔たりを測る。

弧長 s	$r(s)$	$1 - r(s)$
1	0.462117157260009759	0.537883
5	0.986614298151430289	0.0133857
10	0.999909204262595131	9.07957×10^{-5}
30	0.999999999999812848	1.87152×10^{-13}
60	1 (40 桁の精度で)	1.7513×10^{-26}

観察 4.2

数値だけでは到達しないことを示せない—— $s = 100$ では隔たりが 40 桁の外に落ちる。ゆえに閉じた形を使う： $1 - \tanh(s/2) = 2/(e^s + 1)$ であり、これはどの有限の s でも零ではない。測地線はどこまでも伸ばせる——この計量では円板は測地線完備である。

観察 4.3

論文199 と同じ注意がここにも効く——「決して到達しない」ことは有限の計算では見えない。見えるのは指数的に小さくなる数だけであり、零でないことは式が言う。

5. ローレンツの側では、一つが消え、一つが逆を向く

符号を $(-, +, +, +)$ に替える。何が起きるかを二つ挙げる。

観察 5.1 (一つが消える)

区間は正定値でない。離れた二点の隔たりが零にも負にもなりうるので、距離空間にならない——したがって「コーシー列が収束する」という言い方そのものが立たない。四つのうち一つは、偽になるのではなく定義できなくなる。

検算 5.2（一つが逆を向く）： $(t, x) = (0, 0)$ から $(2, 0)$ までの時間的な道の固有時を測る。まっすぐな道は **2** である。途中の $t = 1$ で $x = X$ まで振れる道と比べる。

X	折れた道の固有時	まっすぐより短いか
0	2	等しい
0.1	1.98997487421324	短い
0.3	1.90787840283389	短い
0.5	1.73205080756888	短い
0.9	0.871779788708135	短い
0.99	0.282134719593318	短い

観察 5.3

まっすぐな道が最長である。ゆえにホップ＝リノウの第四の言い方——「任意の二点は長さ最小の測地線で結ばれる」——は、この側では構造的に偽である。論文198 はリーマンの側で「まっすぐ」と「最短」が離れる場所を測った——こちらでは離れるどころか符号が逆になる。

観察 5.4（一つが三つに割れる）

測地線完備も一つではなくなる——時間的・光的・空間的の三つに分かれる。本稿はこの三つが互いに独立であることを構成しない——分かれること自体を述べるにとどめる。

6. 平坦でも不完備であり、そして拡張できる

検算 6.1：平坦な時空から $x > |t|$ の領域（リンドラーくさび）だけを取り出す。曲率は恒等的に零である。 $(t, x) = (0, 2)$ から速さ v で頂点へ向かう慣性的な世界線が、くさびを出るまでの固有時を測る。

v	γ	くさびが出るまでの固有時
0.1	1.005037815	1.809068067
0.3	1.048284837	1.467598771
0.5	1.154700538	1.154700538
0.9	2.294157339	0.458831468
0.99	7.088812050	0.141776241

観察 6.2

曲がっていないのに、測地線が有限の固有時で端に達する——くさびは測地線不完備である。しかしこれは特異点ではない：端の向こうには平坦な時空の残りが広がっており、この空間は拡張可能である。

観察 6.3

ゆえに「不完備」と「特異」は別の語である。不完備は取り出し方でも起こる——切り取れば、どんなに平らな空間でも不完備にできる。特異であるためには、さらに拡張できないことが要る。論文198で平らな円筒が「曲がっていないのに遠回り」を見せたのと同じ形である——そこでも曲率は無実であり、犯人は大域的な形であった。

7. 柵と分離子

観察 7.1（四つの行方）

言い方	リーマン	ローレンツ
測地線完備	成り立つ	三つに割れる
距離完備	成り立つ	定義できない
ハイネ＝ボレル	成り立つ	対応する定理が無い
最短測地線の存在	成り立つ	逆を向く（最長になる）

観察 7.2（柵）

ホップ＝リノウを囲っている柵は、曲率でも次元でも滑らかさでもなく、計量が正定値であることである。柵の内側では四つが一つになり、外へ出た瞬間に一つは消え、一つは割れ、一つは反転する。論文195は線形化を囲う柵を双曲性、論文171は最小二乗を囲う柵を線形性と特定した——ここでの柵は符号である。

観察 7.3（分離子）

四つを分けているのは何が有限で終われるかである——径数か（測地線完備）、点の列か（距離完備）、被覆か（ハイネ＝ボレル）、そして最小が取れるか（最短測地線）。リーマンではこの四つが同じ一つのことを言い、ローレンツでは言わない。

8. 点呼と結び

本稿が確かめたことを並べる。

1. 穴あき平面では三つが同時に壊れる（検算2.1）。
2. 同じ開円板が、計量次第で完備にも不完備にもなる（検算3.1）：同じ道が 0.99999999 と 19.11382792。
3. 双曲計量では測地線が到達しない（検算4.1）： $1 - \tanh(s/2) = 2/(e^s + 1)$ は零にならない。数値ではなく式が言う。
4. ローレンツでは距離完備が定義できない（観察5.1）。
5. そして最短が最長に反転する（検算5.2）：まっすぐが 2、折れた道が 1.90787840283389。
6. 平坦でも不完備、そして拡張可能（検算6.1）：不完備は特異ではない。
7. 柵は符号である（観察7.2）。

結び：「その空間は完備だから大丈夫だ」と言われたら、次に問うべきはどの意味で完備か、そしてその四つを束ねている定理の柵の内側にいるかである。リーマンの側では問う必要がない——ホップ＝リノウが四つを一つにしてくれるからである。一步外へ出ると、束はほどける：一つは定義を失い、一つは三つに分かれ、一つは向きを変える。そして最も静かな教訓は第3節にある——完備かどうかは空間そのものの性質ではなく、その上に何を置いて測ったかの性質であった。同じ円板が、測り方ひとつで、行き止まりにも果てしない広がりにもなる。

参考文献

1. Hopf, H., Rinow, W. (1931). *Ueber den Begriff der vollstaendigen differentialgeometrischen Flaechen*. Commentarii Mathematici Helvetici, 3(1).
2. Poincaré, H. (1882). *Théorie des groupes fuchsians*. Acta Mathematica, 1.
3. Rindler, W. (1966). *Kruskal Space and the Uniformly Accelerated Frame*. American Journal of Physics, 34(12).
4. Geroch, R. (1968). *What Is a Singularity in General Relativity?* Annals of Physics, 48(3).
5. O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity*. New York: Academic Press.
6. Beem, J. K., Ehrlich, P. E., Easley, K. L. (1996). *Global Lorentzian Geometry*. Second edition. New York: Marcel Dekker.
7. 山岸勇輝 (2026). ブラックホール・エントロピーの $\frac{1}{4}$ [論文73]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21666086
8. 山岸勇輝 (2026). 光はどこまで幾何を決めるか [論文111]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21961685
9. 山岸勇輝 (2026). 動かせば、残るのは 2π だけである [論文142]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082281
10. 山岸勇輝 (2026). 「不動点」は一つの定理ではない [論文161]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092530
11. 山岸勇輝 (2026). 「安定」は六つの別の言葉であり、分けているのは何を揺らすかである [論文195]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107170
12. 山岸勇輝 (2026). 「まっすぐ」は「最短」を意味せず、柵は二つある [論文198]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107954
13. 山岸勇輝 (2026). 帰ってこられるかを決めているのは、分母の指数である [論文199]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22108396
14. 山岸勇輝 (2026). 二百本目の点呼 [論文200]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22108829

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)